位相空間回転によるリニアコライダーのための高ルミノシティビーム生成-x-y エミッタンス交換の特性評価-

ビーム物理研究室

B154063 田村　遼平

担当教員 栗木 雅夫

副査　川端 弘治

2018 年 2 月 8 日

要旨

電子・陽電子リニアコライダーでは，扁平ビームを用いることで、低電流で、ビームビーム相互作用を抑制し，かつ高ルミノシティの衝突を実現できる[1]. 現在の設計において、電子と陽電子はダンピングリングへの蓄積による放射減衰で、エミッタンス（位相空間においてビームの占める面積）にして、ε_x=10, ε_y=0.04 mm.mrad という扁平ビームを生成するが、本研究ではビームの位相空間回転を用いた入射器による直接生成について検討する．ビーム進行方向を z として， x-y 及び x-z という二つの自由度間の回転を行うことでこれを実現する。この x-y 横方向位相空間回転操作を RFBT(Round to Flat Beam Transformation) ，x-z 位相空間回転操作を TLEX(Transverse to Longitudinal Emittance Exchange) と呼ぶ. 大きなビーム径でビームを発生させ、エミッタンス空間電荷効果を抑制しつつ、RFBT を行い、大きな非対称エミッタンス(ε_x>>ε_y)を生成する。初期エミッタンスが大きいため、このままではε_xが過大となるが、TLEX による x-z エミッタンス交換を行い、ε_x をリニアコライダーの要求値とする。ε_z が大きなエミッタンスを引き受けることとなるが、ε_z への要求は 8.5e+5 mm.mrad と厳しくないので問題とはならない。本論文では，主に RFBT の性質について、シミュレーションにより研究をおこなった。

目次

1　序論

　電子・陽電子コライダーは、高エネルギーの電子と陽電子を衝突させるタイプの加速器である。互いに反粒子であり、かつ素粒子である電子と陽電子を衝突させると、対消滅反応により純粋な量子数ゼロの真空の励起状態をつくることができる。真空には未発見な粒子を含むあらゆる素粒子が隠されており、真空にエネルギーを与えることでそれらの粒子の対生成反応を起こすことが可能である。この手法により、性質のまだよくわからないヒッグス粒子、トップクォークを大量生成し、その詳細研究をおこない、同時に超対称性粒子や余剰次元などの未発見の粒子や時空構造などの発見を目指すのが国際リニアコライダー計画である。電子・陽電子コライダーでは電子と陽電子の重心系エネルギーが最大化されるため、より高いエネルギーの現象、より質量の重い粒子の生成が可能である。一方で、電子の質量は軽いため、軌道を曲げる際に発生するシンクロトロン放射によるエネルギー損失（ローレンツγの四乗に比例）は膨大となり、シンクロトロンによる高エネルギー加速はビームエネルギーにして 100GeV 程度で限界となっている。その限界を超えてより高いエネルギーの電子・陽電子コライダーを実現しようとするのが、リニアコライダーである。

リニアコライダーでは加速はシンクロトロン放射のない線形加速器で行う。リニアコライダーにおいては，ビームは所定のエネルギーまで加速された後衝突点に送り込まれ，衝突後はそのまま捨てられてしまう為ビーム電流は大きく制限される．例えば，250GeV の 1A ビームを作るためには 250GW という莫大な電力が必要となるためこのような大電流のビームは現実的ではないからだ．現実的なビームパワーで十分なルミノシティを実現し，かつビームビーム相互作用を抑制する方法が扁平ビームによる衝突である[1]．リニアコライダーのルミノシティは

$$L = \frac{fN^2}{4\pi\,\sigma_x\sigma_y}, \tag{1-1}$$

ここで，fは衝突周波数，Nはバンチ内の粒子数，σ_x, σ_yはそれぞれ x, y 方向のビームサイズを表す．分子のパラメーターを大きくすると、必要な電力が大きくなるため、現実的ではない．代わりに分母であるビームサイズを小さくすることで、ルミノシティを大きくする．この時，注意すべき現象が Beamstrahlung である．Beamstrahlung はビームビーム相互作用の一つで，衝突相手となるビームによって作られた磁場がシンクロトロン放射を誘起し、ビームエネルギーを減少させ、エネルギーの広がりをつくってしまう．その値は

$$\Delta E \propto \frac{1}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\sigma_z}, \tag{1-2}$$

と，σ_xとσ_yの二乗の和の逆数に比例する．従って，$\sigma_x \gg \sigma_y$となるような扁平ビームを用いることで Beamstrahlung を抑制し，かつルミノシティを増大させることが可能である．

現在、日本への建設が検討されている次期加速器計画であるILC(International Linear Collider)では、生成したビームを周長 3km のダンピングリングへと一旦蓄積し、x 方向に 10 mm.mrad、y 方向に 0.04　m m.mrad というアスペクト比にして 250 という非対称のエミッタンス状態をつくる。このビームを線形加速器で高いエネルギー(125 GeV あるいはそれ以上)まで加速し、衝突点で x 方向に 640 nm, y 方向に 6 nm という扁平なビームとして、衝突させる． 本研究では、このダンピングリングを用いた方法に代わり、エミッタンス交換技術を利用した方法について検討を行う。詳しくは後述するが、エミッタンス交換は入射器の一部に回転 Q 磁石（磁極が通常の方向に対して 45 度傾いている四重極磁場)、二重極モード空洞（TM_{110} モード）を導入することで可能となる。これが可能であれば、周長 3km のリングが不要となり、加速器の構成を大幅に簡略化することで、建設、運転、コストなどの面で大きなメリットが得ら

れる.

エミッタンスは運動における保存量である。通常の $x, y,$ そして z の三つの自由度が独立な運動においては各々の二次元位相空間(座標変数と運動量)で定義されるエミッタンス（面積）が保存量であるが、一般的な自由度間混合を含めた場合には xyz の六次元位相空間で定義されるエミッタンス（体積）が保存量となる。衝突点で必要となるエミッタンスをε_{x1}, ε_{y1}そしてε_{z1}とし、ビーム発生時のエミッタンスを同様にε_{x0}, ε_{y0}そしてε_{z0}とおくと$\varepsilon_{x0}\varepsilon_{y0}\varepsilon_{z0} = \varepsilon_{x1}\varepsilon_{y1}\varepsilon_{z1}$が成立する。このような条件を満たす初期エミッタンスから出発し、エミッタンス交換技術を用いて、衝突点で必要とされる各自由度のエミッタンスを実現する．その際、問題となるのは非線形運動によるエミッタンス増大である。運動がすべて線形であれば、いかなる場合もエミッタンス増大は生じないが、非線形な成分が存在するとき、エミッタンスは増大してしまい、もはや保存量ではなくなる。ビームにおける典型的な非線形運動の一つがビーム自身の持つ電荷によるクーロン力であり、空間電荷効果と呼ばれる。空間電荷効果はローレンツγの 2 乗に反比例するので、低エネルギーにおいて顕著となる。すなわち、ビーム発生時の空間電荷効果を抑制することが、一つの鍵となる。空間電荷効果によるエミッタン

ス増大を抑制するには、二つの方法がある。一つは空間電荷効果を線形化することである。通常のビームはガウス分布をしているが、ガウス分布をするビームの空間電荷効果は非線形となる。ガウス分布にかわり、ビームの電荷密度を均一にすることで、空間電荷効果は線形化され、エミッタンス増大は生じなくなる。もう一つの方法は、ビームサイズを広げることで、クーロン力そのものを小さくすることである。初期ビームサイズを広げると、必然的にエミッタンスもそれに比例して大きくなるため、ε_{x0}, ε_{y0} も大きくなる. xy という二つの自由度間だけでエミッタンス交換を行うと、必要な衝突点における ε_x, ε_y を実現できない。そのため、z も加えて、三つの自由度を用いて、必要なエミッタンスを実現する。具体的には、大きな x, y 方向のサイズでビームを生成し、空間電荷効果を抑制する。そして、xy エミッタンス交換(Round to Flat Beam Transformation; RFBT)を行ない、$\varepsilon_y = \varepsilon_{y1}$ とする。この時、初期エミッタンスを大きくとっていたため、必然的に $\varepsilon_x > \varepsilon_{x1}$ となるが、これを xz エミッタンス交換(Transverse to Longitudinal Emittance eXchange; TLEX)を用いて, $\varepsilon_x = \varepsilon_{x1}$ とする。大きなエミッタンスを ε_z が引き受けるが、要求値は大きいので、問題とならない。

2　エミッタンス交換

ここでは，エミッタンス交換についての議論において必要となる事項、および

エミッタンス交換の理論について説明する。

2.1　座標系の定義

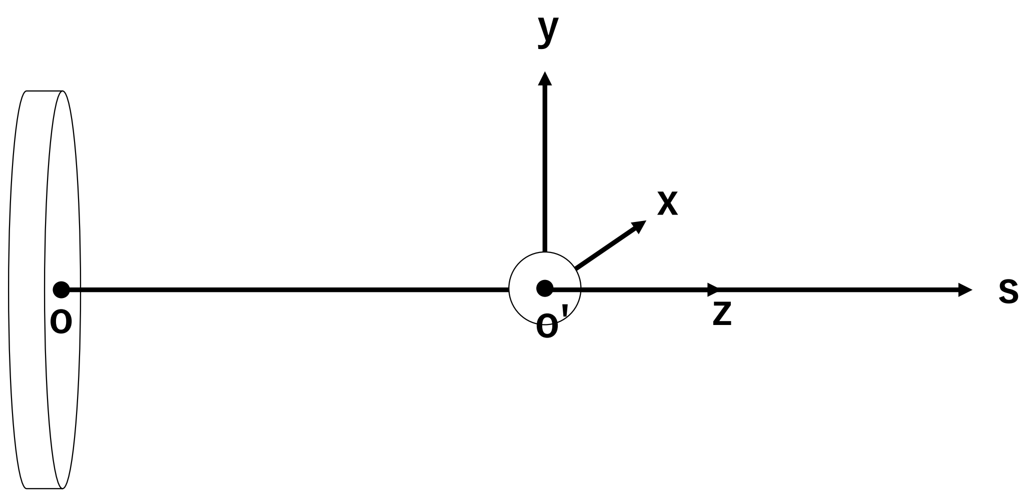

図 2-1 線形加速器の座標系．カソード表面中心が原点として，進行方向に s 方向を取った右手系である．また，ビーム中心を原点として z 軸が s 方向と同方向に設定されている．

加速器の物理で用いられる座標系は，一般的に曲線直交座標系である。進行方向に s をとり、s 軸上を進行する粒子を基準粒子とする。s に直交する方向に x,y 軸をとり、各粒子は基準粒子を原点にとりその座標を表示する。粒子の s 方向の座標を z として定義する。線形加速器の場合は基準粒子の軌道は直線となるか

ら、s 軸は直線となり、結果的に図 2-1 のような右手系の直交座標系(x, y, s)となる.

それぞれ(x, y, s)を時間で微分したものを$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{s})$又は$(v_x, v_y, v_z)$，(x, y)を進行方向 s で微分したものを(x’, y’)と表す．x’，y’は速度を用いて $x' = v_x/v_z$, $y' = v_y/v_z$ と表すことも出来る.

2.2　位相空間とエミッタンス

(x, p_x, y, p_y, z, p_z)で表される空間を 6 次元位相空間と呼ぶ．粒子はこの位相空間の点として表される。多数の粒子を考えると、粒子が位相空間中で占める体積を定義することができる。この量をエミッタンスと呼ぶ。エミッタンスは多数の粒子をビームとして考えた場合、ビームの品質を表す量であり、加速器の性能を評価するうえで重要な量となる。

加速器では、運動量を無次元化するため、x', y', z'を用いる。この座標系では粒子の位相空間における位置は次のようなベクトルで表される。

$$U = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ z' \end{pmatrix}, \tag{2-1}$$

このベクトルに対して、次のような行列を定義する。行列の成分は粒子に対して平均値を計算したものである。

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{U}} \rangle = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xx' \rangle & \langle xy \rangle & \langle xy' \rangle & \langle xz \rangle & \langle xz' \rangle \\ \langle x'x \rangle & \langle x'^2 \rangle & \langle x'y \rangle & \langle x'y' \rangle & \langle x'z \rangle & \langle x'z' \rangle \\ \langle yx \rangle & \langle yx' \rangle & \langle y^2 \rangle & \langle yy' \rangle & \langle yz \rangle & \langle yz' \rangle \\ \langle y'x \rangle & \langle y'x' \rangle & \langle y'x' \rangle & \langle y'^2 \rangle & \langle y'z \rangle & \langle y'z' \rangle \\ \langle zx \rangle & \langle zx' \rangle & \langle zy \rangle & \langle zy' \rangle & \langle zz \rangle & \langle zz' \rangle \\ \langle z'x \rangle & \langle z'x' \rangle & \langle z'y \rangle & \langle z'y' \rangle & \langle z'z \rangle & \langle z'z' \rangle \end{pmatrix} \tag{2-2}$$

この行列の行列式の平方根が六次元位相空間で定義されるエミッタンスである。

通常のビーム運動は各自由度において独立であるから、各自由度で二次元位相空間によるエミッタンスを定義した場合、各々のエミッタンスが保存量となる。

$$\varepsilon_w = \sqrt{\langle w^2 \rangle \langle w'^2 \rangle - \langle ww' \rangle^2}, \tag{2-3}$$

ここで w は $x, y,$ あるいは z である。このエミッタンスの定義は、運動量を角度として表示しているため、エネルギーに依存した量となる。この場合、加速前後でエミッタンスは変化してしまうため、不都合を生じる。そのため、エネルギー依存性を除去した量を規格化エミッタンスとして次のように再定義する。

$$\varepsilon_{\ nw} = \gamma\beta\varepsilon_w, \tag{2-4}$$

ここで、$\gamma\beta$ はローレンツ因子である。

2.3　転送行列

粒子の輸送は行列により現すことができる。ここでは(x,y)二次元での運動を

考える。この場合、ビームは次のようなベクトルで表される。

$$U = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}, \tag{2-5}$$

と表される。ビームマトリックスは,

$$\Sigma = \langle U\widetilde{U} \rangle = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xx' \rangle & \langle xy \rangle & \langle xy' \rangle \\ \langle x'x \rangle & \langle x'^2 \rangle & \langle x'y \rangle & \langle x'y' \rangle \\ \langle yx \rangle & \langle yx' \rangle & \langle y^2 \rangle & \langle yy' \rangle \\ \langle y'x \rangle & \langle y'x' \rangle & \langle y'x' \rangle & \langle y'^2 \rangle \end{pmatrix}, \tag{2-6}$$

で定義される．xと yに相関がない場合、式(2-6)の対角 2×2 部分行列を除く成分はすべてゼロとなる。この時、

$$\sqrt{\boldsymbol{det}|\boldsymbol{\Sigma}|} = \boldsymbol{\varepsilon_x \varepsilon_y} \tag{2-7}$$

と、シグマ行列の行列式の平方根はエミッタンスの積と等しい。xy 相関がある場合には、非対角成分は必ずしもゼロとはならず、上式は成立しない。非対角の 2×2 部分行列で定義される次の量

$$\varepsilon_{xy} = \begin{vmatrix} \langle xy \rangle & \langle xy' \rangle \\ \langle x'y \rangle & \langle x'y' \rangle \end{vmatrix}^{0.5}, \tag{2-8}$$

をカップリングエミッタンスと定義する．

次に、　シグマ行列の輸送について考える。粒子の状態は輸送行列により移送される．ビームマトリックスの移送は転送行列をMとすると

$$\Sigma(z_f) = M\Sigma(z_i)\widetilde{M}, \tag{2-9}$$

と表される．ここで転送行列Mは一般的に，

$$\widetilde{M}J_4M=J_4, \tag{2-10}$$

を満たす行列である[2]．ここでJ_4は 4×4 単位シンプレティック行列と呼ばれ，

単位シンプレティック行列

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \tag{2-11}$$

を用いて，

$$J_4=\begin{pmatrix}J & 0\\ 0 & J\end{pmatrix}, \tag{2-12}$$

で表される．式(2-10)を満たす転送行列Mは，シンプレティックな行列であると言われる．このように輸送行列の行列式は 1 であるので、ビーム輸送によりシグマ行列の行列式の大きさは変化しないことになる。シグマ行列の行列式の平方根がエミッタンスであるから、ビーム輸送に対してエミッタンスは保存量であることが導かれる。

3　扁平ビームの生成

電子ビームをソレノイド磁場中で生成すると、角運動量を与えることができる。角運動量は x-p_y 相関などを生じ、x-p_x 空間などにビームを投影した面積は大きくなるため、そのように求めたエミッタンス（射影エミッタンスと呼ぶ）は大き

く増大する。一方で、ビームの占める位相空間体積は全く増大しておらず、このエミッタンス増大は見かけだけのものである。この自由度間の相関はビームライン下流に適切な skew 四重極 3 つを設置することで、解消される。その際、必然的に自由度間でエミッタンスが非対称となる。以下、参考文献[3][4][5]に従い説明する.

$$X=\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \tag{3-1}$$

と定義するとビームマトリックスは

$$\Sigma=\begin{pmatrix} \langle X\tilde{X}\rangle & \langle X\tilde{Y}\rangle \\ \langle Y\tilde{X}\rangle & \langle Y\tilde{Y}\rangle \end{pmatrix}, \tag{3-2}$$

と表せられる. ビームが回転対称であれば、回転についてビーム行列は不変となる。回転を表す行列は

$$R=\begin{pmatrix} I\cdot cos\theta & I\cdot sin\theta \\ -I\cdot sin\theta & I\cdot cos\theta \end{pmatrix}, \tag{3-3}$$

ここで I は 2×2 単位行列である. よって,

$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{R}^{-1}, \tag{3-4}$$

が成立する. 式(3-4)より,

$$\langle X\tilde{X}\rangle cos^2\theta+\langle Y\tilde{Y}\rangle sin^2\theta+\left(\langle X\tilde{Y}\rangle+\langle Y\tilde{X}\rangle\right)sin\theta cos\theta=\langle X\tilde{X}\rangle \tag{3-5}$$

が成り立つ。回転角 θ は任意であるので, 式(3-5)より

$$\langle X\tilde{X}\rangle=\langle Y\tilde{Y}\rangle, \tag{3-6}$$

$$\langle X\tilde{Y}\rangle = -\langle Y\tilde{X}\rangle. \tag{3-7}$$

が導かれる。式(3-6)，式(3-7)の両辺の転置を取ると

$$\widetilde{\langle X\tilde{Y}\rangle} = -\widetilde{\langle Y\tilde{X}\rangle} =- \langle X\tilde{Y}\rangle. \tag{3-8}$$

従って，2×2 行列$\langle X\tilde{Y}\rangle$は反対称的な行列であり，シンプレティック単位行列を用いて，

$$\langle X\tilde{Y}\rangle = \mathcal{L}J, \tag{3-9}$$

と表すことができる．この成分は粒子の角運動量を表す成分であり、ここで$\mathcal{L}$は角運動量Lと縦方向の運動量p_zを用いて，

$$\mathcal{L} =\langle xy'\rangle = -\langle x'y\rangle = \frac{L}{2p_z}, \tag{3-10}$$

で表される．$(x,x'),(y,y')$で表される対角成分$\langle X\tilde{X}\rangle,\langle Y\tilde{Y}\rangle$は一般的な楕円状のバンチを表し

$$\langle X\tilde{X}\rangle = \langle Y\tilde{Y}\rangle = \varepsilon T_0, \tag{3-11}$$

と表される．ここでT_0は

$$T_0 = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \dfrac{1+\alpha^2}{\beta} \end{pmatrix}, \tag{3-12}$$

であり，α,βは Twiss Parameter である． $|T_0| = 1$である．式(3-9)，(3-12)を併せると，回転対称で角運動量を有するバンチのビームマトリックスは一般的に

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon T_0 & \mathcal{L}J \\ -\mathcal{L}J & \varepsilon T_0 \end{pmatrix}, \tag{3-13}$$

と置けることがわかる。転送行列 M による転送を考えると、式(2-9)より転送後

のビームマトリックスは

$$\Sigma = M\Sigma_0\widetilde{M}, \tag{3-14}$$

となる．この転送行列 M による転送後のビームマトリックスが対角成分のみ,

つまり

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_- T_- & 0 \\ 0 & \varepsilon_+ T_+ \end{pmatrix}, \tag{3-15}$$

となると仮定しよう．ここで$T_\pm$は

$$T_\pm = \begin{pmatrix} \beta_\pm & -\alpha_\pm \\ -\alpha_\pm & \dfrac{1+\alpha_\pm^2}{\beta_\pm} \end{pmatrix}, \tag{3-16}$$

である．シンプレティックな転送行列による転送については,

$$I_1 = \varepsilon_{4D} = \sqrt{|\Sigma|}, \tag{3-17}$$

$$I_2(\Sigma) = -\frac{1}{2}Tr(J_4\Sigma J_4\Sigma), \tag{3-18}$$

の二つの不変量が確認されている[3]．この二つの不変量を式(3-14)の転送につ

いて見てみると，式(3-17)，(3-18)からそれぞれ

$$\varepsilon_+\varepsilon_- = \varepsilon^2 - \mathcal{L}^2, \tag{3-19}$$

$$\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 = 2(\varepsilon^2 + \mathcal{L}^2), \tag{3-20}$$

の二式が得られる．この二式を連立することで

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \mathcal{L}, \tag{3-21}$$

が得られる．つまり，回転対称で角運動量を有するビームに対して、適切なビーム輸送を行うと、式(3-21)で表されるような、非対称なエミッタンス状態が生成できる。その値は、対角成分のエミッタンスと、角運動量由来のカップリングエミッタンスで決定されることとなる．

3.1 ソレノイドを用いた扁平ビーム生成

電子銃から射出される電子は熱的なエミッタンスのみを有している。熱的なエミッタンスにおいては、いかなる自由度間の相関も持っていないので、角運動量はゼロである。前節で議論した方法により、非対称なエミッタンスを生成するには、角運動量を与える必要がある。カソード表面にソレノイド磁場を印加すると、各ビームに角運動量を与えることができる [4]．ソレノイド磁場の中心がカソード中心にあるとすると、磁束密度の保存より、ソレノイド磁場の端部磁場により生じる運動量変化は

$$\Delta x' = -\kappa y, \qquad \Delta y' = \kappa x, \tag{3-22}$$

となる [5]．ここで$\kappa = \frac{eB_C}{2p_z}$である。 B_c はカソード上における磁束密度である。

ここで、ソレノイド磁場中では粒子の位置x, yは変化せず，ビーム径は小さくソレノイド磁場が$B_z(r) \approx B(0)$という近似ができると仮定している。ソレノイド下流における粒子は

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' - \kappa y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' + \kappa x \end{pmatrix}, \tag{3-23}$$

となる．カソード表面上においては相関がないので，ソレノイド下流でのビームマトリックスは

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \kappa\sigma^2 \\ 0 & \kappa^2\sigma^2 + \sigma'^2 & -\kappa\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\kappa\sigma^2 & \sigma^2 & 0 \\ \kappa\sigma^2 & 0 & 0 & \kappa^2\sigma^2 + \sigma'^2 \end{pmatrix}, \tag{3-24}$$

ここで，$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle, \sigma'^2 = \langle x'^2 \rangle = \langle y'^2 \rangle$である．式(3-24)と式(2-10)を比較すれば

$$\begin{gathered} \mathcal{L} = \kappa\sigma^2, \\ \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2}, \qquad \varepsilon_u = \sigma\sigma', \\ \alpha = 0, \qquad \beta = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2}}, \end{gathered} \tag{3-25}$$

ここで，ε_u^2は熱エミッタンスである。　式(3-25)を式(3-21)に代入すると，生成される扁平ビームのエミッタンスは，

$$\varepsilon_\pm = \sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2} \pm \mathcal{L}, \tag{3-26}$$

となる。さらに，$\mathcal{L} \gg \varepsilon_u$を満たす時，式(3-26)より

$$\varepsilon_+ = 2\mathcal{L}, \qquad \varepsilon_- = \frac{\varepsilon_u^2}{2\mathcal{L}},$$

$$\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} \approx \left(\frac{2\mathcal{L}}{\varepsilon_u}\right)^2, \tag{3-27}$$

が得られる.

ソレノイド磁場中でビームを生成することで、非対称なエミッタンス状態を作ることができることが示された。その際のエミッタンス比は熱エミッタンスとソレノイド磁場が与える角運動量により決まる。また、エミッタンスの積は保存されている。

3.2 扁平ビーム生成のビーム輸送

前節で述べたように，扁平ビームの生成には角運動量を持った回転対称ビームに対して適切なビーム輸送を行い、非対角成分が全て 0 にする必要がある.この節では具体的にこのビーム輸送を求める。結論からいえば、この輸送は 3 つの回転四重極磁場で実現される[4][5]. 回転四重極とは、通常用いられる四重極磁場に対して、磁極の方向を 45 度傾けたものである。今後，この回転始終極三つからなるビーム輸送ラインを skew Q channel と呼ぶ.

Skew Q channel の輸送行列を求めるために、通常の四重極磁石三つからなる転送行列をM_{NQ}とすると

$$M_{NQ} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{3-28}$$

と表すことができる。ここで，A,B は 2×2 の行列である．式(3-28)に、式(3-3)に$\theta = 45^\circ$ を代入した行列を作用させると、skew Q channel の転送行列 M となる。

$$M = R^{-1} M_{NQ} R, \tag{3-29}$$

行列は,

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_+ & A_- \\ A_- & A_+ \end{pmatrix}, \qquad A_\pm = A \pm B, \tag{3-30}$$

と表される。式(3-30)を式(3-14)に代入し、式(3-15)となる，つまり転送後の非対角成分が 0 となるための条件は

$$\varepsilon\left(A_+ T_0 \widetilde{A_-} + A_- T_0 \widetilde{A_+}\right) + \mathcal{L}\left(A_+ J \widetilde{A_+} - A_- J \widetilde{A_-}\right) = 0, \tag{3-31}$$

となる。ここで式(3-31)を解くために

$$A_- = A_+ S, \tag{3-32}$$

を満たすシンプレティックな行列Sを仮定すると，式(3-31)の第二項は$|S| = 1$より 0 となる．第一項はさらに条件

$$T_0 \tilde{S} + S T_0 = 0, \tag{3-33}$$

を満たす場合，0 となる．T_0は対称行列なので，式(3-33)より

$$S T_0 = -T_0 \tilde{S} = -\widetilde{S T_0}, \tag{3-34}$$

従って，ST_0は反対称行列である．一方，$|S| = |T_0| = 1$であるから$ST_0 = \pm J$である．従って，

$$S = \pm J T_0^{-1} = \pm \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ \dfrac{1+\alpha^2}{\beta} & \alpha \end{pmatrix}. \tag{3-35}$$

と置くことができることがわかる。式(3-12)，式(3-35)と照らし合わせると，シンプレティックな行列Sは回転対称なビームの$\langle X\tilde{X}\rangle$よって決定されることがわかる．

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \Sigma_{12} & -\Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} & -\Sigma_{12} \end{pmatrix}. \tag{3-36}$$

Skew Q channel による転送後のビームマトリックスの対角成分は

$$2\Sigma_{XX,YY} = \varepsilon\left(A_+ T_0 \widetilde{A_+} + A_- T_0 \widetilde{A_-}\right) \mp \mathcal{L}\left(A_+ J \widetilde{A_-} - A_- J \widetilde{A_+}\right), \tag{3-37}$$

である．ここで，$ST_0\tilde{S} = T_0$又は$J\tilde{S} = -SJ = \pm T_0$は，式(3-35)の$S$の符号によってどちらが成立するか決定する．ここではSの符号を正として計算していく．すると，skew Q channel 下流でのビームマトリックスは

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_- T & 0 \\ 0 & \varepsilon_+ T \end{pmatrix}, \qquad T = \frac{1}{2} A_+ T_0 \widetilde{A_+}, \tag{3-38}$$

となる．

次に，式(3-32)を満たすような具体的な skew Q channel をもとめる．

Thin lens 近似を用いた quadrupole の 2×2 転送行列は

$$Q(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}, \tag{3-39}$$

と表せられる．ここでqは quadrupole strength であり，quadrupole の焦点距離fを用いて，$q = 1/f$と表される．より実用的な単位として focusing strength

$$k\left[\frac{1}{m^2}\right] = \frac{0.299g\left[\frac{T}{m}\right] l_{eff}[m]}{\beta\, E[GeV]}, \tag{3-40}$$

が存在する. l_{eff}は quadrupole の実効長さ, gは quadrupole の gradient である.

又，ドリフトスペースの 2×2 転送行列は

$$D(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3-41}$$

である．Skew Q channnel における前，中間 2 つを区切るドリフトスペースの中心間距離をd_2，中間，後を区切るドリフトスペースの中心間距離をd_3とすれば，skew Q channel の転送行列において

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3-42}$$

と表される．又，Bについては，符号が逆となるので

$$B = A(-q_1, -q_2, -q_3, d_2, d_3), \tag{3-43}$$

となる．従って，式(3-41), (3-42)を式(3-32)に代入し，$q_i(i = 1,2,3)$について解くと，

$$q_1 = \pm\sqrt{\frac{-d_2 S_{11} + S_{12} - d_2 d_T S_{21} + d_T S_{22}}{d_2 d_T S_{12}}},$$

$$q_2 = -\frac{S_{12} + d_T S_{22}}{d_2 d_3 (1 + S_{12} q_1)},$$

$$q_3 = -\frac{q_1 + q_2 + d_2 S_{11} q_1 q_2 + S_{21}}{1 + (d_T q_1 + d_3 q_2) S_{11} + d_2 d_3 q_2 (S_{21} + q_1)}, \tag{3-44}$$

となる．ここでS_{ij}はSの(i, j)成分を表し，d_Tは$d_T = d_2 + d_3$を表している．

行列Sは相関行列と呼ばれ,

$$Y = SX, \tag{3-45}$$

のように，x と y の相関を表す行列である．

4 シミュレーション

本章では、シミュレーションの概要について説明する。シミュレーションは粒子トラッキングコードである ASTRA[6]と ELEGANT[7]を使用して行われた．各々の特徴として，ASTRA は外部データ(磁場や高周波電場等)を読み込み、高次の項まで含めたシミュレーションが比較的容易に可能である．一方，ELEGANT は条件最適化の機能を持ち、トラッキングの細かな設定が可能である。また、ASTRA と ELEGANT にはデータに互換性があり、相互にやり取りが可能である。本シミュレーションでは、粒子生成から skew Q channel まではAstra を用いた。skew Q channel では、ELEGANT を用いて、*x*-*y* 相関に起因す

るカップリングエミッタンスを最小化する skew Q channel の設定の最適化を行い、その設定を ASTRA に読み込み、シミュレーションを行った。

ビームラインは上流から、電子銃、ソレノイド磁場、加速管、そして skew Q channel からなる。図 4-1 にその概略図を示す．電子銃には 1.5 セルの RF 電子銃を仮定し、カソードはその端面(s=0)に設置されている。電子銃全体はソレノイド磁場の中に設置されている。RF 電子銃出口から skew Q channel の間には加速管が設置されている。距離 d_1, d_2, d_3 はそれぞれ配置された装置の中心から中心までの距離である．d_0 のみカソード表面からの距離となっている．L は quadrupole の厚さを示している．以下、各コンポーネントについて説明する。

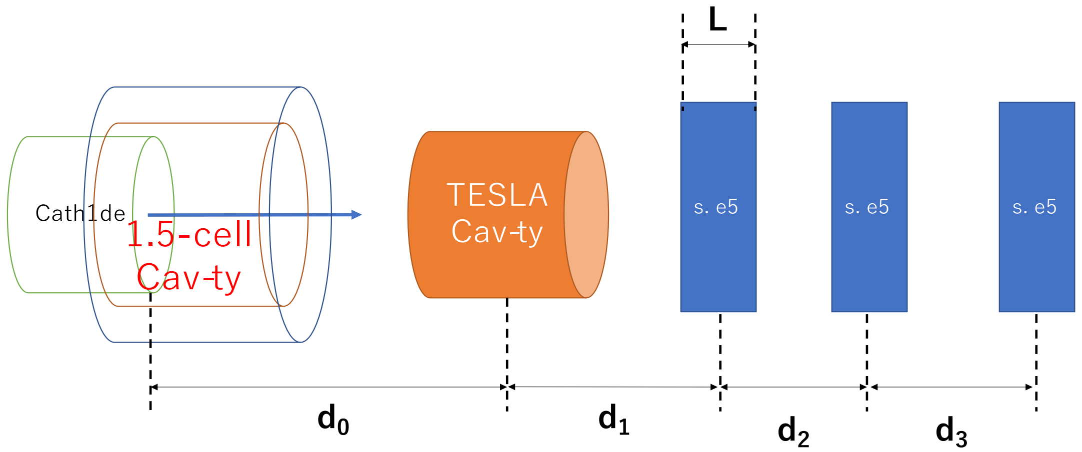

図 4-1 シミュレーションビームライン概略．d_1, d_2, d_3 はそれぞれ配置された装置の中心から中心までの距離を示している．d_0 のみカソード表面からの距離を示す．L は quadrupole

の厚さである．

4.1　電子銃と加速空洞

本シミュレーションでは電子銃として、FLASH type 1.5-cell RF 電子銃[5], 加速空洞として 9-cell TESLA type Cavity[5]を用いている．駆動周波数はともに 1.3 GHz である。加速電場の典型的な s プロファイルを図 4-2 に示す．プロファイルは ASTRA の FIELDPLOT[6]を用いることで表示した．以下，全て FIELDPLOT を用いたプロファイルである．RF 電子銃はカソード表面から s=0.3 m まで電場が分布している。加速空洞は s=1.205m から s=2.587m まで電場が分布している．詳細設定については後述する．

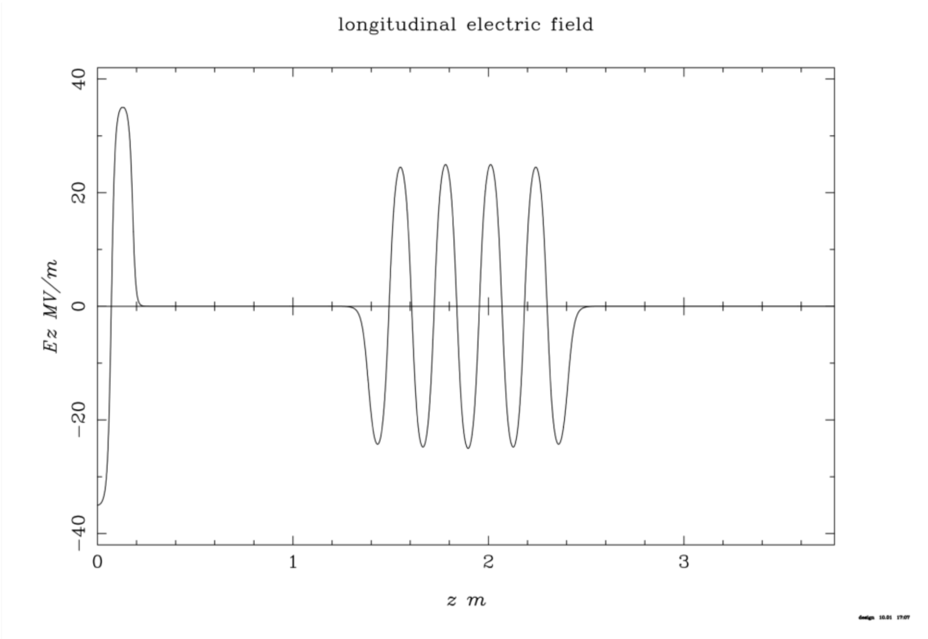

図 4-2 ビームラインの E_zプロファイル．カソード表面に印加されているのが RF 電子銃の電場．中心に位置しているのが加速空洞による電場である．

次に，ソレノイドの磁場について説明する．ソレノイド磁場の s プロファイルを図 4-3 にしめす．実線で z 方向の磁場 Bz を、破線で r 方向の磁場勾配を示す。z 方向のピーク磁場は s=0.077[m]地点において 0.126 T である。カソード表面における Bz は 0.082T である。ソレノイド磁場は Cathode 表面から s=0.8m 地点まで伸びている．

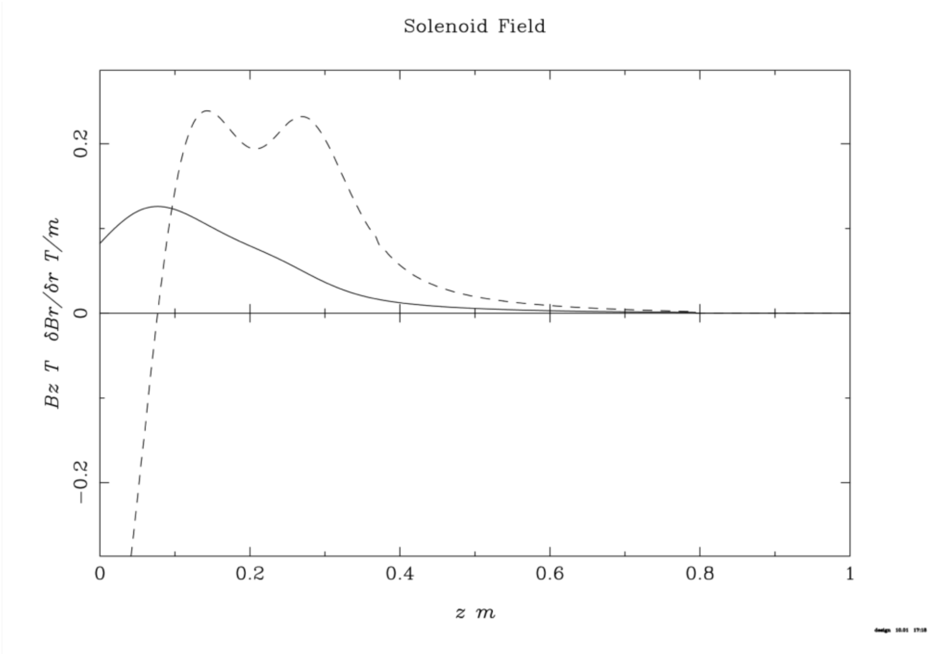

図 4-3 ソレノイド磁場のプロファイル．実線が Bz，破線が δBr/δr を表している．

4.2　シミュレーションによる RFBT 特性の評価

Parameter	value	units
rms drive laser pluse (Gaussian shape) length	3	ps
width of energy distribution on cathode	0.75	eV
magnetic field on cathode B_C	~824	Gauss
rms beam size on cathode σ_z	0.8	mm

bunch charge Q	0.5	nC
gun rf phase	~20	degree
gun peak gradient	35	MV/m
booster cavity peak gradient	25	MV/m
gun & booster cavity frequency	1.3	GHz
quadrupole effective length L	0.102	m
d_0	1.896	m
d_1	2.124	m
d_2	0.702	m
d_3	0.502	m
マクロ粒子数	2500	個

表 4-1 シミュレーションパラメーター

シミュレーションに用いた基本パラメーターを表 4-1 に示す．RF 電子銃および, 加速空洞の RF 位相は、ASTRA の Auto phase 機能[6]を用いて設定された。加速空洞の位相はエネルギーを最大化するように、粒子分布の中心がクレスト位置（最大加速位相）に乗るように設定される。ＲＦ電子銃のＲＦ位相の具体的

な最適化アルゴリズムは不明だが、電子銃下流において加速された粒子のパラメーターは，RMS バンチ長が 1.56[ps]， 縦方向のエミッタンスが 0.253 [π keV.mm]， ローレンツβが 0.994 であった．バンチ長が初期値の 3.0ps に対して半分程度となっていることから、ビーム内に速度変調をかけて、電子銃出口でバンチ長を小さくする条件に最適化されていると思われる。なお，ここでは空間電荷効果は無視している．

表 1 のパラメーターを用いてシミュレーションを行い、得られた Skew Q channel 上流のビーム粒子分布を用いて、式(3-21)により skew Q channel 下流で得られるであろうエミッタンスの値を求めると，

$$\varepsilon_n^+ = 28.71 \ \ mm \ \ mrad, \qquad \varepsilon_n^- = 0.023 \ \ mm \ \ mrad, \qquad (4\text{-}1)$$

となった。この値は理想的な skew Q channel により輸送された場合に得られる値である。

次に skew Q channel のシミュレーションを行った．Thin lens 近似の場合，最適な Quadrupole strength は式(3-44)から求まるが，実際には磁極の厚みの効果により、最適値は異なる値となる。そこで、式(3-44)から求まる値を初期値として、skew Q channel 下流でのシグマ行列の非対角成分が全て 0 に近づくような最適

値を求める．本論文では ELEGANT の optimization 機能[7]を用いて、その最適値を求め，その結果を用いて ASTRA によりシミュレーションを行い、その出力結果を最終のものとした．ELEGANT における最適化の指標は式(4-2)で与えられるシグマ行列の非対角成分の和、

$$|\langle xy\rangle| + |\langle xy'\rangle| + |\langle x'y\rangle| + |\langle x'y'\rangle| \tag{4-2}$$

を用い、この指標を skew Q channel 下流で最小化するように最適化を実行した。その結果得られたエミッタンスは， q_1 が正，負の場合においてそれぞれ

$$q_1 > 0 \;\; : \quad \varepsilon_n^+ = 28.73 \;\; mm \;\; mrad, \qquad \varepsilon_n^- = 0.037 \;\; mm \;\; mrad, \tag{4-3}$$

$$q_1 < 0 : \quad \varepsilon_n^+ = 28.83 \;\; mm \;\; mrad, \qquad \varepsilon_n^- = 0.055 \;\; mm \;\; mrad. \tag{4-4}$$

という値となった。この時のビームサイズの変化をそれぞれ図 4-4，図 4-5 に示す．$q_1 < 0$の場合、$q_1 > 0$の場合に比べ，最後の四重極通過後の x ビームサイズの発散が大きいことが、図 4-4，図 4-5 からわかる．従って本論文では$q_1 > 0$における解が望ましいものとした．ε_n^-において、(4-4)の値と(4-1)の値が倍程度異なっている。これは四重極磁場の色収差によるものであることが、本研究で明らかになった。詳しくは次節で述べる。

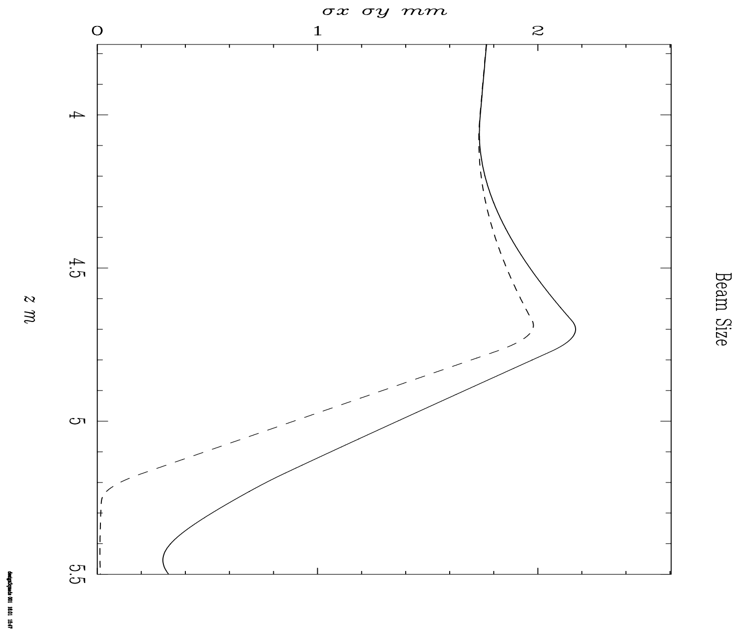

図 4-4 $\boldsymbol{q_1 > 0}$の条件における skew Q channel の最適解でのビームサイズの変化．点線が y 方向，実線が x 方向のビームサイズである。

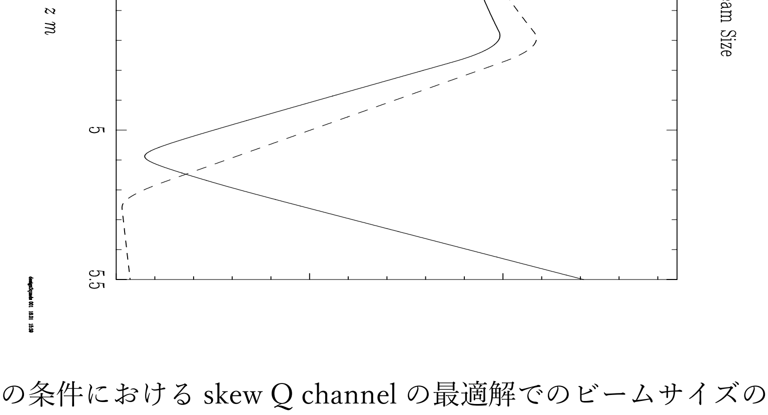

図 4-5 $\boldsymbol{q_1 < 0}$の条件における skew Q channel の最適解でのビームサイズの変化．点線が y 方向，実線が x 方向のビームサイズである。

4.3　四重極磁場の非線形性の影響

ここでは skew Q channel が持つ非線形性の RFBT 特性への影響について調べた結果を述べる。そのため、異なる方法にて求めたエミッタンスについて、定義していおく。ビームの初期エミッタンスから、完全な線形ビーム力学を仮定し、式(3-26)から得られる skew Q channel 下流におけるエミッタンス，つまり理想的な RFBT により得られるエミッタンスをε_+およびε_-と定義する。また、シミュレーションにより得られた skew Q channel 上流の粒子分布から、式(3-21)を用いて、skew Q channel 下流のエミッタンスを計算したものをε_{S+}およびε_{S-}と定義する。そして、skew Q channel の下流までシミュレーションを行い、得られた粒子分布から求めたエミッタンスをε_{T+}およびε_{T-}と定義する。

本シミュレーションでは空間電荷効果を含めていない。バンチの形状について、横方向は半径 r の円内に均一な粒子分布、進行方向はガウス分布とした．粒子の初期運動量は当方的（熱的）であるとした．

カソード上に印加する磁場の関数として、各エミッタンスの値を図 4-6 に示す．磁場を変化させる際は形状を変えずに、全体をカソード表面磁場にスケールさ

せた。横軸にカソード上での縦方向ソレノイド磁場をとり、左縦軸にε_+、右縦軸にε_-をとっている。各々ε_{S+}、ε_{S-}、ε_{T+}およびε_{T-}をばつ印，十字，丸，四角にてしめしている。Skew Q channel の設定は、条件毎に最適化したものを用いた．四重極場の最適化上限，下限は設定していないので、四重極場として現実的でない強さになっている場合もふくまれている。

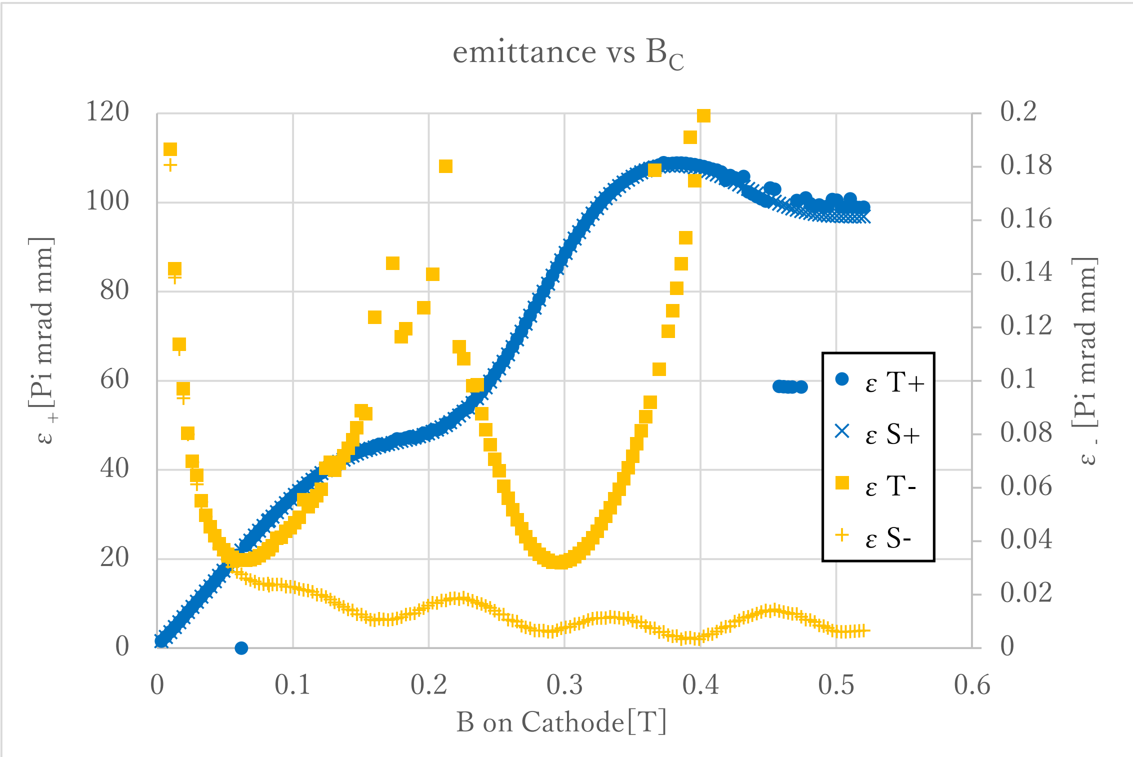

図 4-6 カソード上に印加する磁場を変化させた時のエミッタンス変化．左縦軸に$\boldsymbol{\varepsilon_+}$、右縦軸に$\boldsymbol{\varepsilon_-}$をとっている．ソレノイド磁場の下流の粒子分布から、式(3-21)を用いて計算されるエミッタンスを$\boldsymbol{\varepsilon_{S+}}$および$\boldsymbol{\varepsilon_{S-}}$，最下流までトラッキングした粒子分布から求めたエミッタンスを$\boldsymbol{\varepsilon_{T+}}$および$\boldsymbol{\varepsilon_{T-}}$と表す　$\boldsymbol{\varepsilon_{S+}}$，$\boldsymbol{\varepsilon_{S-}}$，$\boldsymbol{\varepsilon_{T+}}$および$\boldsymbol{\varepsilon_{T-}}$をばつ印，十字，丸，四角で示している．

図 4-6 よりε_+については，ε T+，ε S+の値が両者共よい一致をしめしているが、ε_-については、磁束密度が 0.05 Tesla を超える領域で、ε_{S-}に対して、ε_{T-}が大きな値をしめしている。その差はソレノイド磁場の強さにより大きく変化している。そこで、図 4-7 に、横軸に skew Q channel のうち最も強い focusing strength の値をとり、縦軸に$\delta\varepsilon_- \equiv \varepsilon_{T-} - \varepsilon_{S-}$で定義される$\delta\varepsilon_-$をとり，結果を表示する。

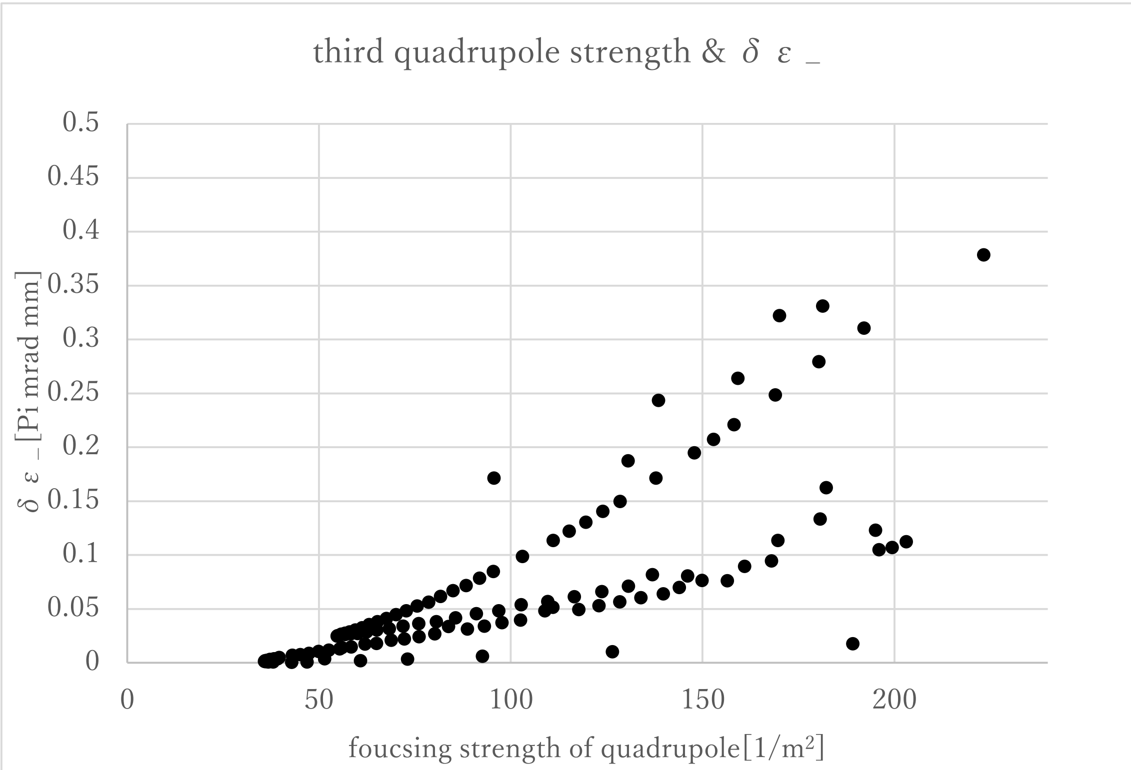

図 4-7　横軸に skew Q channel のうち最も強い quadrupole の focusing strength，縦軸をε −としてε T−，ε S−をプロット．$\boldsymbol{\varepsilon_{s-}}$および$\boldsymbol{\varepsilon_{T-}}$を三角およびひし形で示している．

Skew Q channel 上流でのビームサイズや残り二つの四重極場による非線形効

果も影響し，歪な依存性を見せているが，最も強い focusing strength が強いほどエミッタンスに大きく差が生じていることがわかる．従って，skew Q channel による非線形性が原因でエミッタンス増大が起こっていることが想起される．これを確かめる為に ELAGANT を用いて skew Q channel による転送を行列をもちいて行った．この場合、四重極磁場による転送は完全に線形な運動として記述されるため、エミッタンスの差を生んでいるものが四重極磁場がもつ非線形性であれば、エミッタンスの差は生じないはずである。四重極磁場が持つ可能性のある非線形性とは、色収差によるものである。色収差とは粒子のエネルギーにより生じる収差のことで、各粒子が異なるエネルギーを持つ場合に、収束の強度が異なるために予期したような収束が得られない現象である。行列による転送では、この色収差は存在しない。

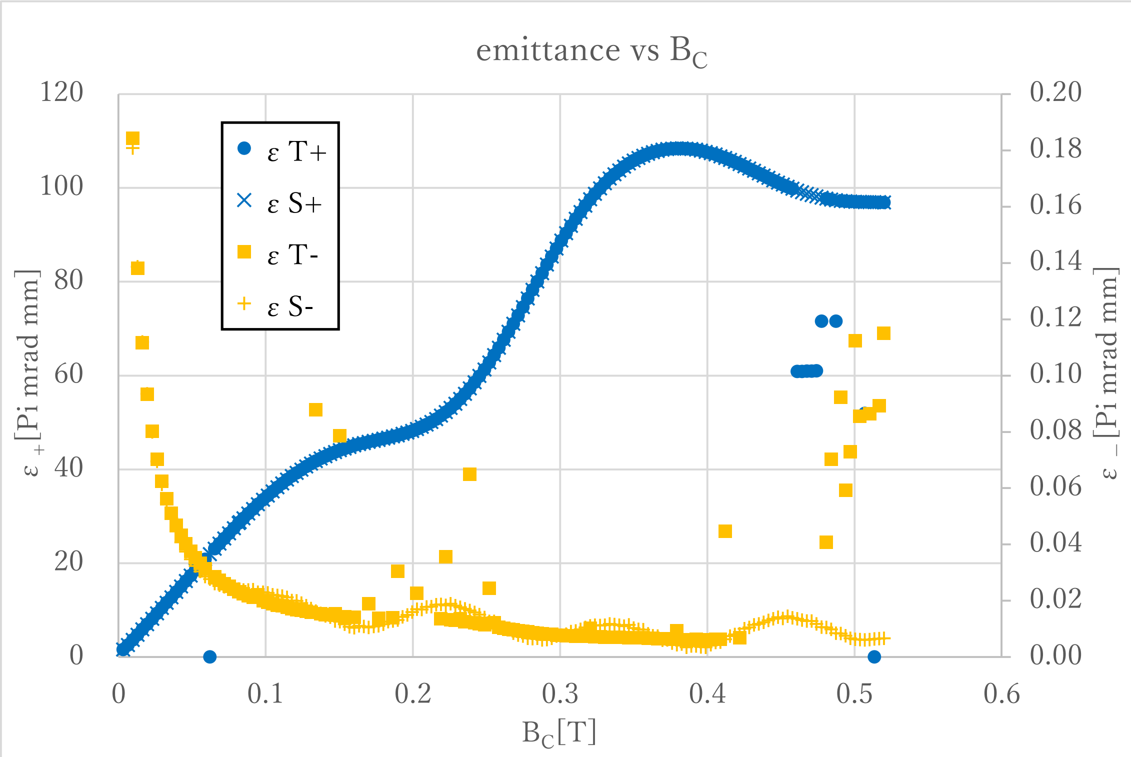

図 4-8 カソード上に印加する磁場を変化させた時のエミッタンス変化．Skew Q channel での転送を行列で行なった．左縦軸に$\boldsymbol{\varepsilon_+}$、右縦軸に$\boldsymbol{\varepsilon_-}$をとっている．ソレノイド磁場の下流の粒子分布から、式(3-21)を用いて計算されるエミッタンスを$\boldsymbol{\varepsilon_{S+}}$および$\boldsymbol{\varepsilon_{S-}}$，最下流までトラッキングした粒子分布から求めたエミッタンスを$\boldsymbol{\varepsilon_{T+}}$および$\boldsymbol{\varepsilon_{T-}}$と表す$\boldsymbol{\varepsilon_{S+}}$，$\boldsymbol{\varepsilon_{S-}}$，$\boldsymbol{\varepsilon_{T+}}$および$\boldsymbol{\varepsilon_{T-}}$をばつ印，十字，丸，四角で示している．

図 4-8 に、行列による転送を用いた結果を示す。表示は図 4-6 と同様の規則によって表示した。ε_{S+}とε_{T+}は図 4-6 と同様によい一致をしめしている。ε_{S-}およびε_{T-}は図 4-6 に比較して良い一致をしめしている。このことより、ε_{S-}とε_{T-}の差を生み出している原因の大きな部分は四重極磁場が持つ非線形成分であることがわかる。

非線形性の大きな部分は色収差であると予想される。このため、ビーム条件としてエネルギー広がりをなるべく小さくするとともに、skew Q channel の磁場をなるべく小さくなるように設計することが必要である。これにより，四重極磁場の非線形成分の影響を最小化できる．

4.4 ソレノイド磁場中での粒子運動の影響

式(3-27)および式(3-25)から、得られるエミッタンスは、ソレノイド磁場に対して

$$\varepsilon_+ \propto B_c, \qquad \varepsilon_- \propto \frac{1}{B_C}, \tag{4-5}$$

のように比例、および反比例するはずである。図 4-9 に横軸にカソード上での磁場 B_cをとり、左縦軸に ε_+を、右縦軸に ε_-をとり， ε_{S+}， ε_+， ε_{S-}，そして ε_-をプロットし比較した．それぞれグラフではばつ印，白抜き丸，十字，白抜き四角で表示している．これより、 ε_+において、B_cが 0.1 T を超える領域で、 ε_{S+}との間に ε_+差がみられる。この両者の計算においては、skew Q channel の取り扱いは同等であるから、原因はソレノイド磁場中におけるビーム運動にある。

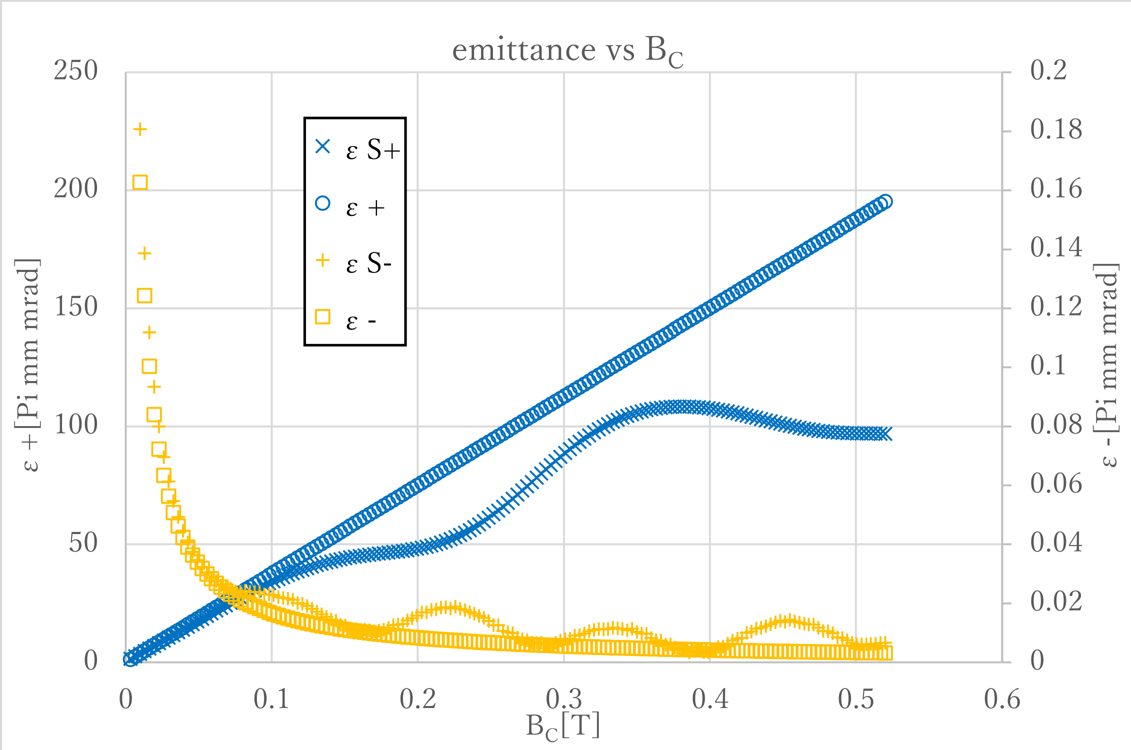

図 4-9 カソード上に印加する磁場を変化させた時のエミッタンス変化．左縦軸に$\boldsymbol{\varepsilon}_{+}$、右縦軸に$\boldsymbol{\varepsilon}_{-}$をとっている．ソレノイド磁場の下流の粒子分布から、式(3-21)を用いて計算されるエミッタンスを$\boldsymbol{\varepsilon}_{S+}$および$\boldsymbol{\varepsilon}_{S-}$，理想的な式(3-26)を用いてカソード上の初期状態と印加磁場のみで導かれるエミッタンスをε_{+}，ε_{-}と表す．$\boldsymbol{\varepsilon}_{S+}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_{S-}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_{+}$および$\boldsymbol{\varepsilon}_{-}$をばつ印，十字，白抜き丸，白抜き四角で示している．

ここで角運動量に関する Busch の理論について簡単に説明する[8][9]．磁場がある回転不変系に対して，単粒子の正準角運動量は次式のように保存される。

$$L = \gamma m r^2 \dot{\phi} + \frac{e}{2\pi}\Phi = const, \tag{4-6}$$

ここで，座標系として (r, ϕ, z)をとり、z 軸からの距離を r、回転角をϕと定義している。Φは粒子の r 方向の位置を r'として、z 軸から距離 r'の範囲に含まれる磁束である。ただし，この式が成立するのは、ローレンツγが定数とみなされる

場合である。電子は軽く，RF 電子銃内には 35MV/m 程度の強い電場がかけられていることから、回転周期に比べてローレンツ γ は素早く大きな値にまで加速されることから、影響は大きくないと考えられる。 Busch の理論をカソード表面に適応すると、第一項は$\langle\dot{\phi}\rangle$=0 より，消去される．従って正準角運動量は$L \propto \Phi$の関係を持ち，式(3-10)より

$$\mathcal{L} \propto \Phi, \tag{4-7}$$

であることは容易にわかる. このことからも式(3-27)と同様に最終的なエミッタンスがカソード上に印加する磁場に依存することが示される.

ところが，式(3-26)はソレノイドについての近似

$$B_z(r) \approx B(0), \tag{4-8}$$

を用いて導出されている。有限長のソレノイドでは、端部磁場の影響により必ずしも式(4-7)は成り立たない。その差は、ソレノイド径を基準として、ビーム径が大きいほど大きくなる. また, 最終的に角運動量はソレノイドの端部磁場によって正準角運動量から運動学的角運動量に変換されるため、ソレノイド磁場中でビームが横方向に移動すると、Φが変化してしまい、角運動量とビームの初期位置との比例関係が崩れる。

これらの効果を見るために、電子銃の加速電場を一様でかつ時間的に一定とし、ソレノイドの端部磁場が短い区間のみ存在するように、その勾配を大きくとった。加速電場の様子を図 4-10 に、ソレノイドの軸方向磁場を図 4-11 に、径方向磁場（端部磁場）の様子を図 4-12 にしめす。これらの条件により、粒子の横方向運動（移動）を大きく抑制し、かつ端部磁場が局在するために、角運動量は端部磁場が存在する場所での粒子位置にのみ依存することになる。

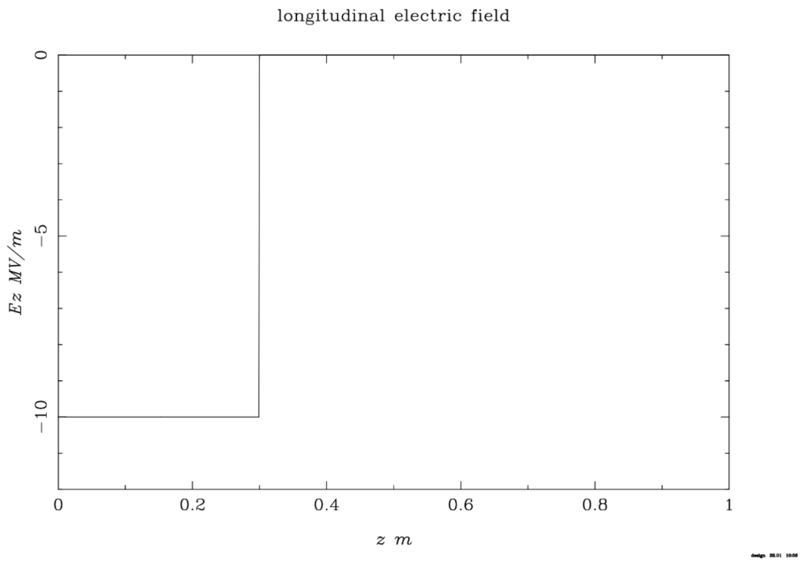

図 4-10 電子銃 RF Cavity 変更後の DC cavity プロファイル．変更前は図 4-2 参照.

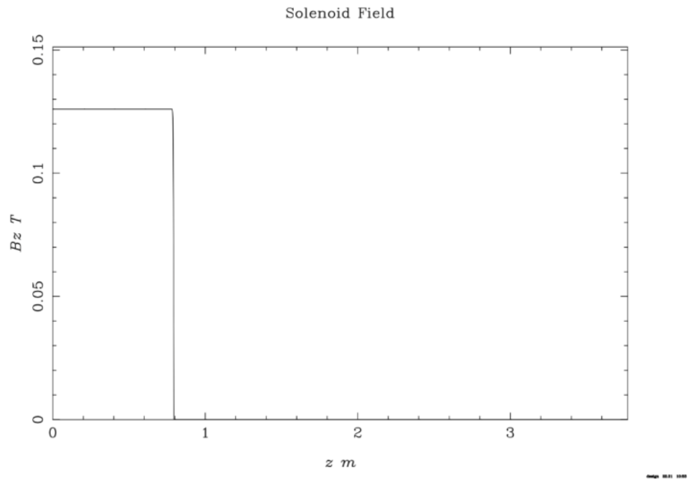

図 4-11 変更後のソレノイド縦方向の磁場 Bz. 変更前は図 4-3 参照.

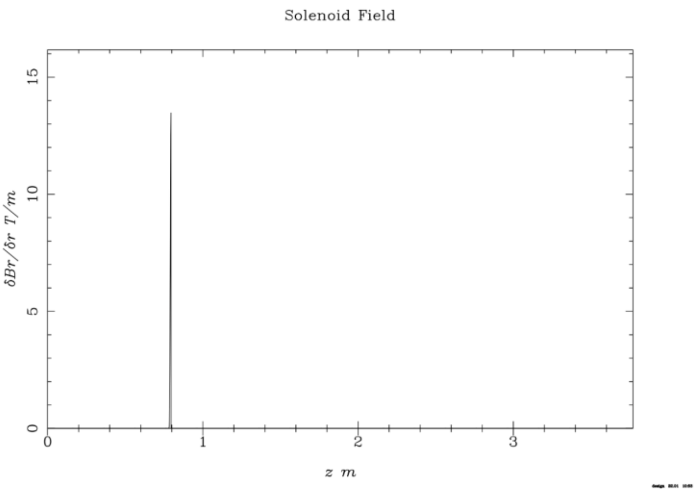

図 4-12 変更後のソレノイド磁場の半径方向勾配 δBr/δr. 変更前は図 4-3 参照.

図 4-13 および 図 4-14 は、電子銃電場とソレノイド磁場の変更前および後における、粒子のソレノイド磁場中での軌跡である. ここでは、プローブ粒子して、初期位置$(0.5\sigma_x, 0.5\sigma_z)$, $(1.0\sigma_x, 1.0\sigma_z)$, $(1.5\sigma_x, 1.5\sigma_z)$, $\left(0.5\sigma_y, -0.5\sigma_z\right)$,

$\left(1.0\sigma_y, -1.0\sigma_z\right)$, $(1.5\sigma_y, -1.5\sigma_z)$ に粒子を置いている。これにより、意図したとおりに、電場および磁場の変更により、粒子の横方向運動を大きく抑制できていることが確認できる。

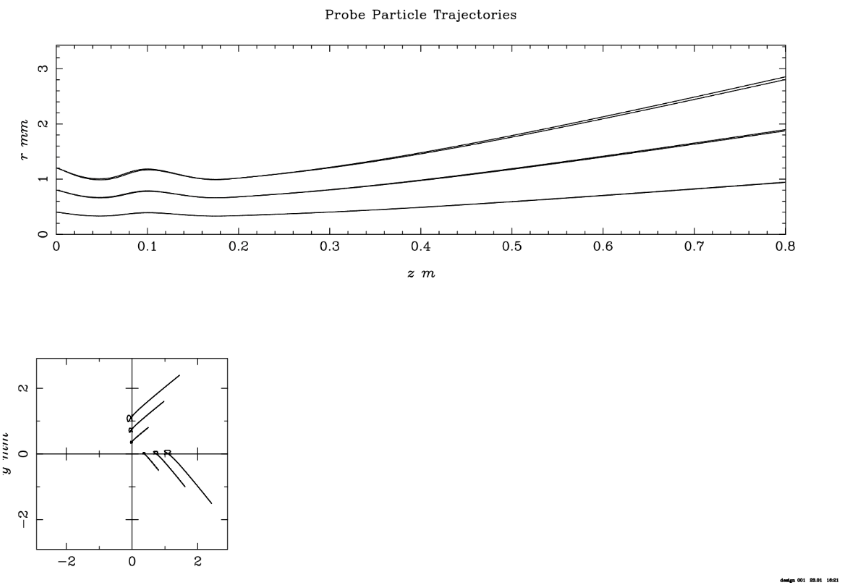

図 4-13 電子銃に 1.5-cell RF cavity, ソレノイドに変更前のソレノイド(図 4-3)を用いた時のソレノイド磁場内部におけるプローブ粒子の軌跡. 上部図は横軸に s, 縦軸に r, 下部図は横軸に x, 縦軸に y をとっている。

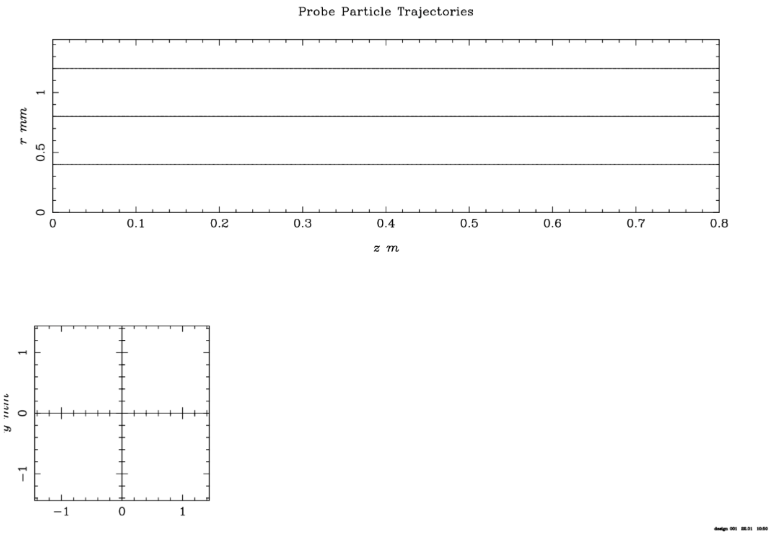

図 4-14 DC cavity と変更後のソレノイド(図 4-10，図 4-11)を用いた時の，ソレノイド磁場内部におけるプローブ粒子の軌跡を図 4-13 と同様に示した。

電子銃 cavity とソレノイド磁場を図 4-10，図 4-11，図 4-12 とした条件で、表 4-1 のパラメーターを用いてシミュレーションを行った。その結果を図 4-15 にしめす。表記方法は，ε_{T+}，ε_{S+}，ε_{+}，ε_{T+}，ε_{S-}，ε_{-}を図 4-8，図 4-9 と同様に表記する.

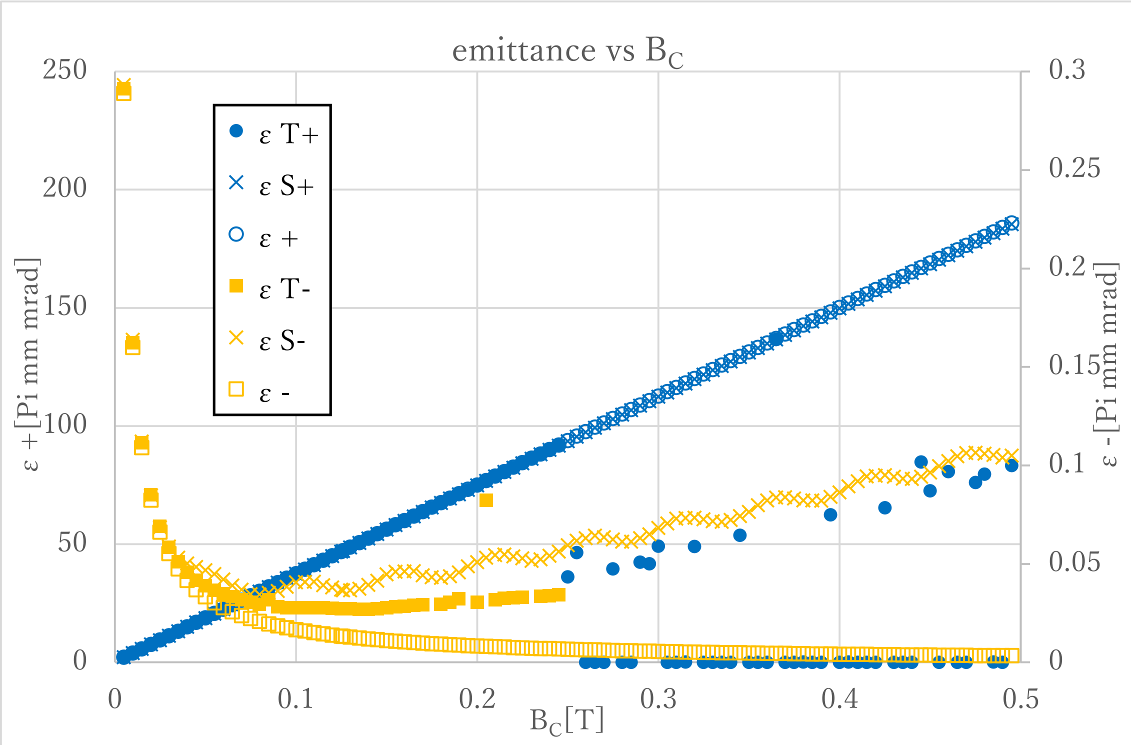

図 4-15 電子銃 Cavity，ソレノイド磁場の変更後シミュレーション．Skew Q channel の非線形性は無視している．表記規則は図 4-8，図 4-9 と同様である．

カソード上の磁場が 0.24[T]以上においては，最適化に失敗しているため、0.24[T]以下の結果について議論する．ε_+はいずれの定義の値もよい一致を示しており，式(4-5)から予想されるように、磁場に対して線形の振る舞いをしめしている。この結果は、この事実と整合する。従って、ソレノイド磁場中での粒子の横方向位置変動が、エミッタンスの差を生じている原因である。一方で、ε_-は

$\varepsilon_{S-} > \varepsilon_{T-} > \varepsilon_-$ となっており、異なる値をしめしている．

このビーム移動による影響を定量的にしめすため、食い違いを示す指標とし

て、

$$\delta_{\varepsilon\pm} = \frac{\varepsilon_{\pm} - \varepsilon_{S\pm}}{\varepsilon_{\pm}} \times 100[\%], \tag{4-9}$$

を定義する．初期ビーム径とソレノイド出口におけるビーム径の差（増加量）を横軸にとり、縦軸に$\delta_{\varepsilon+}$をとり、表示したものが図 4-16 である。ビームサイズの変化量の増加にしたがい$\delta_{\varepsilon+}$は、ほぼ二次で増加している。ビームサイズの変化量移が 0 の時，$\delta_{\varepsilon+}$の値はほぼゼロとなっていることから、粒子の横方向移動がエミッタンス増大の原因として支配的であることが結論できる。このことから、エミッタンス増大を抑制するため、ビーム移動をより少なくするように、電子銃電場、あるいはソレノイド磁場の設計を行う必要があることがわかる。

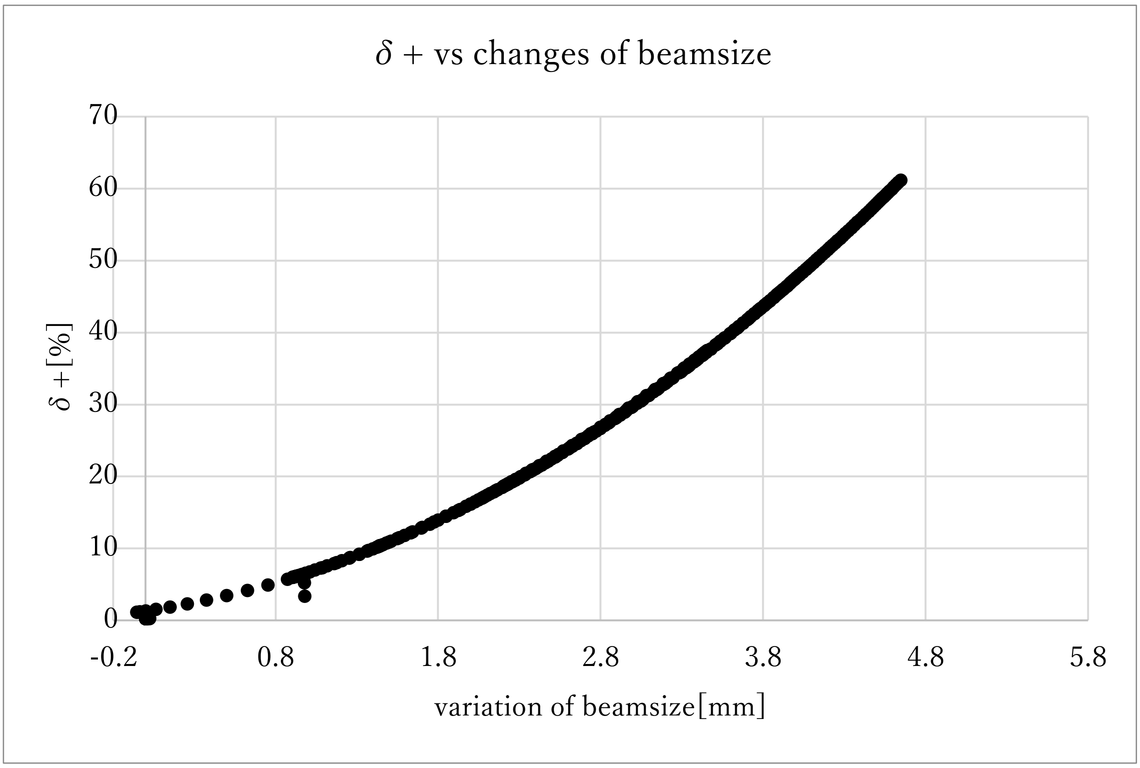

図 4-16　横軸に初期からソレノイド下流まででのビームサイズの変化量，縦軸に $\delta_{\varepsilon+}$を設定した.

同様の図を縦軸を$\delta_{\varepsilon-}$について作成したものを、図 4-17 にしめす。ソレノイド磁場中でのビームサイズ変化量に対して、$\delta_{\varepsilon-}$は複雑な動きを示しており、この指標では$\delta_{\varepsilon-}$の振る舞いを理解できない。

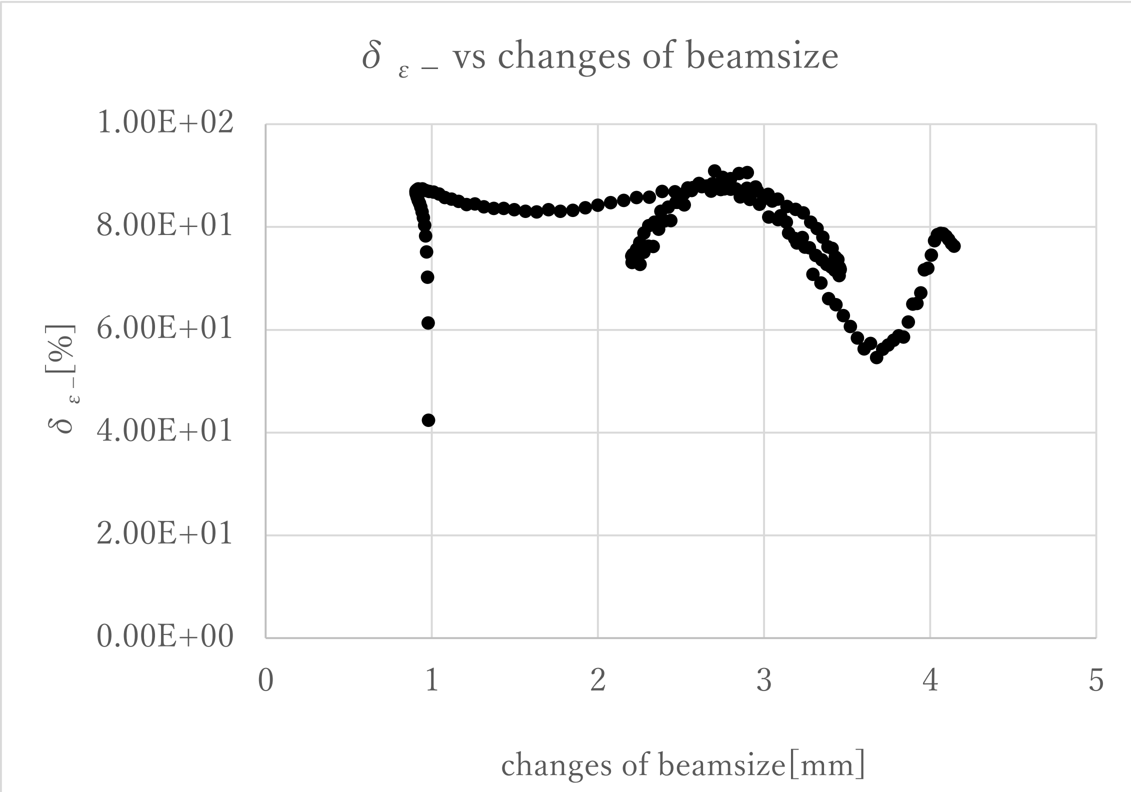

図 4-17 横軸に初期からソレノイド下流まででのビームサイズの変化量，縦軸に $\delta_{\varepsilon-}$を設定した.

4.5　初期ビームサイズ依存性

カソード上での初期ビームサイズ依存について調べた結果を述べる。式(3-25)より、初期エミッタンス ε_u はビームサイズに比例するが、角運動量由来のエミッタンス成分$\mathcal{L}$はビームサイズの二乗に比例する。$\mathcal{L} \gg \varepsilon_u$ という近似のもとで、式(3-27)によると、ε_+はビームサイズの二乗に比例し、ε_-はビームサイズには依存しない。図 4-18 に、表 4-1 に示されたパラメータを用いてエミッタンスの初期ビームサイズ依存性を求めた結果を示す。横軸に初期ビーム径、左縦軸に ε_+，右縦軸に ε_-を表示している。粒子分布は第 4.3 章での設定と同じとし、初期

ビームサイズのみ変化させた．図 4-19 は、Quadrupole による色収差による効果を含めないで、その他の条件は図 4-18 と同じにしてシミュレーションを行った結果である。ε_{T+}，ε_{T-}，ε_{S+}，ε_{S-}をそれぞれ丸，四角，ばつ印，十字で示している．

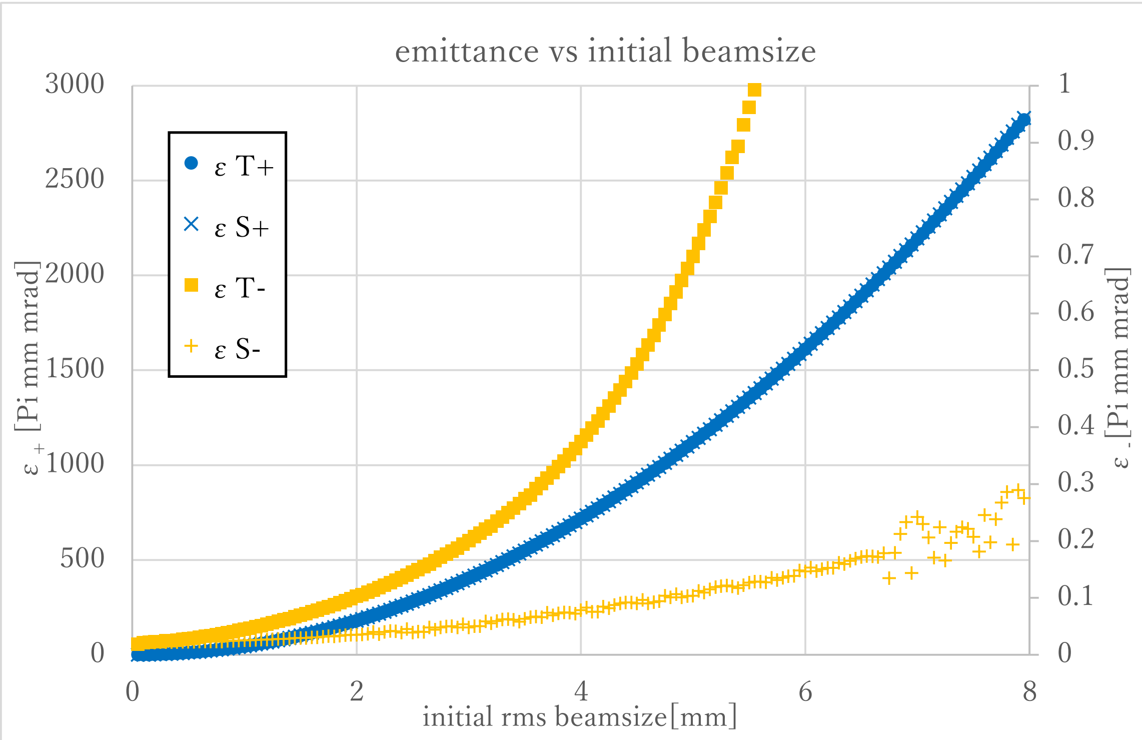

図 4-18 エミッタンスのビームサイズ依存．横軸が初期ビームサイズ，左縦軸に$\boldsymbol{\varepsilon}_{+}$、右縦軸に$\boldsymbol{\varepsilon}_{-}$をとっている． $\boldsymbol{\varepsilon}_{T+}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_{T-}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_{S+}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_{S-}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_{+}$および$\boldsymbol{\varepsilon}_{-}$を丸，四角，ばつ印，十字，白抜き丸，白抜き四角で示している．

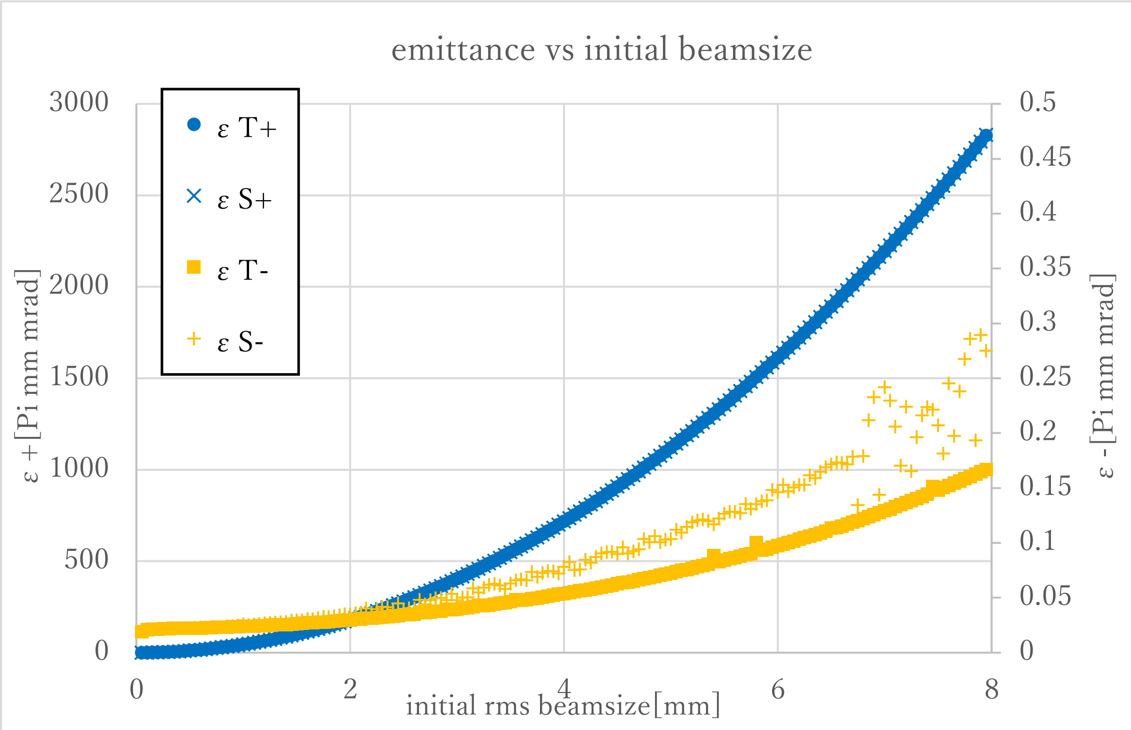

図 4-19 Quadrupole の非線形効果を取り除いて，図 4-18 と同様のトラッキングを行なったもの．表記方法は図 4-18 と同様である．

図 4-18 と図 4-19 における ε_{T-} を比較すると， 図 4-19 での値にくらべて、図 4-18 の値に顕著な増大がみられ， ε_{T-} では skew Q channel から受ける色収差により顕著なエミッタンス増大が起こっていることがわかる．四重極の磁場の強さは中心からの距離に比例するので、ビームサイズが大きいほど極場の強い位置を通過することになり、その影響を強く受けていることを示している。

図 4-19 において、ε_{T-} と ε_{S-} の値を比較すると、初期ビームサイズが大きいほどその差が増大しているが，トラッキングによる誤差範囲内である．色収差以外

のエミッタンス増大の要因は、少なくとも観測可能なほど大きくないことが結論できる。

4.6　線形理論との比較

式(3-25)，式(3-27)より$\varepsilon_u \gg \mathcal{L}$の近似において、ミッタンスのビームサイズ依存性は

$$\varepsilon_+ \propto \sigma^2, \qquad \varepsilon_- \propto const, \tag{4-10}$$

となる．図 4-20 に式(3-26)から得られるエミッタンスε_+，ε_-とシミュレーションにより求めたε_{S+}，ε_{S-}をプロットしたものを示す．横軸と縦軸の定義は図 4-19 のものに従い，ε_+，ε_-はばつ印，十字，白抜き丸，白抜き四角で表している．

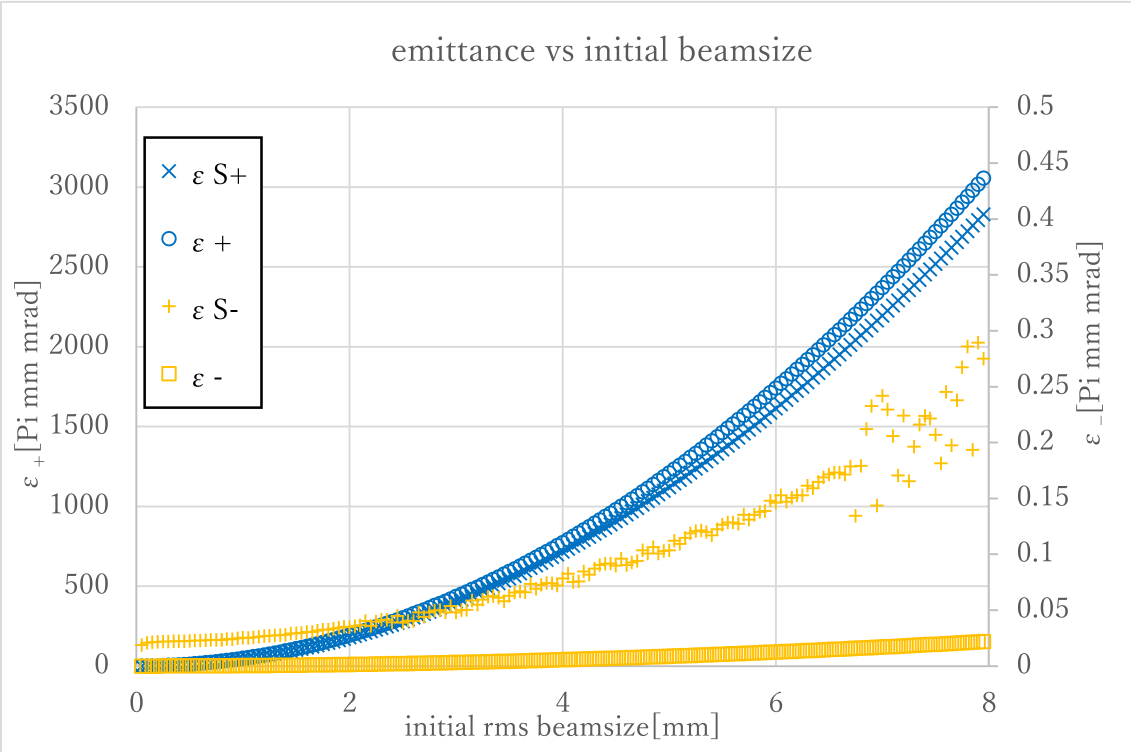

図 4-20: 初期ビームサイズに対して、$\boldsymbol{\varepsilon_+}$、$\boldsymbol{\varepsilon_{S+}}$および$\boldsymbol{\varepsilon_-}$、$\boldsymbol{\varepsilon_{S-}}$を、左右の縦軸にて示す。横軸と縦軸の定義は図 4-19 と同様である．ε_+， ε_-はばつ印，十字，白抜き丸，白抜き四角で表している．

ε_{S+}， ε_+はよく一致している。初期ビームサイズが大きくなるにつれε_{S+}， ε_+との間に若干の差がみられるが、数値計算の誤差によるものと思われる． ε_-とε_{S-}には有意な差がみられる。初期ビームサイズが大きいほどその差は大きくなっている． ε_{S-}に含まれているのはソレノイド磁場中における粒子の運動と、線形運動による skew Q channel のビーム輸送である。線形運動はエミッタンス増大を起こさないので、ε_-のエミッタンス増大の原因はソレノイド磁場中におけ

る粒子運動である。一方で、図 4-17 でみたように、ε_-のエミッタンス増大とビームサイズの変化量との間には単純な関係を見出すことは出来なかった。角運動量はソレノイド磁場中に発生する横方向磁場と粒子の s 方向運動量のベクトル積で与えられることから、厳密にはその積分量を評価する必要があるすなわち、

$$\Delta p_t = \int ec\vec{\beta} \times \overrightarrow{B_r} dt,$$

を求める必要がある。Bush 理論では粒子の横方向位置が一定としているから、その値の差がエミッタンス増大を引き起こす。図 4-17 では上の積分を評価するかわりに、入り口と出口での差を見たわけだが、ε_-はε_+よりも大きさが桁違いに小さいため、攪乱の影響を受けやすいと考えられる。ε_-のエミッタンス増大の依存性をきちんと評価するには、より詳細な分析が必要であると思われるが、それは次の課題としたい。

まとめ

本論文では、リニアコライダーにおける高ルミノシティビームの生成を念頭に、エミッタンス交換による扁平非対称ビームの生成について検討した。エミッ

タンス増大をもたらす低エネルギーにおける空間電荷効果の抑制のため、大きなビーム径でビームを発生させ、RFBT および TLEX を用いてリニアコライダーに必要な扁平ビームの生成が必要である。本論文では、その準備として主に RFBT の特性について研究をすすめた。その結果、本手法により *xy* に非対称なエミッタンスを持つビームが生成可能なことが確認できた。その一方で、エミッタンスの振り分けの性能を悪化させる要因として、ソレノイド磁場中での粒子の横方向移動、四重極磁場の色収差、等が支配的であることが判明した。エミッタンスの増大を抑制するためには、ソレノイド磁場中での粒子の横方向の移動を最小化するように、RF 電子銃電磁場やソレノイド磁場の設計をするとともに、四重極磁場の強さを最小化するようなビーム光学設計が必要となる。また、本論文では詳しく調べることは出来なかったが、原理的にカソード上のソレノイド磁場の非均一性も影響があると思われる。今後、これらの効果について定量的な分析をすすめ、TLEX の特性研究と合わせることで、リニアコライダーで必要とされるビームが本手法により生成可能かどうかの検討を進めていきたい。

参考文献

---

[1] 栗木雅夫, “位相空間回転によるエミッタンス振り分けとその応用”, 加速器,

Vol.15, No.3, p108-116(2018)
[2]大西幸喜, “単粒子力学入門”, 高エネルギー加速器セミナーOHO(2000)
[3]K.-J. Kim, “Round-to-flat transformation of angular-momentum-dominated beams”, Phys. Rev. ST Accel. Beams 6, 104002(2003)
[4]E. Thrane et al., “Photoinjector Production of a Flat Electron Beam”, Proceedings of LINAC2002, Gyeongju, Korea
[5]YIE-E SUN, “Angular-momentum-dominated electron beams and flat-beam generation”, doctoral deissertation, the university of chicago
[6] K.Flotmann, “Astra”, DESY, Hamberg, www.desy.de/~mpyflo,2000
[7] Elegant, https://www.aps.anl.gov/Accelerator_Systems_Divi
[8] M.Reiser, “Theory and Design of Charged Particle Beams”
[9]L. Groening, C. Xiao and M. Chung, “Extension of Busch’s theorem to particle beams”, Phys. Rev. ST Accel. Beams 21, 014201(2018)