

令和3年度 卒業論文

位相空間回転による STF ビームラインでの高ルミノシティビーム生成

～X-Z エミッタンス交換の特性評価～

広島大学理学部物理科学科

加速器物理学研究室

B185113 伊達 圭祐

担当教員 栗木 雅夫

## 要旨

本研究は電子陽電子リニアコライダーで高いルミノシティを実現するために必要となる、低エミッタンスで大きなアスペクト比を持ったビームを、ビームの位相空間制御により実現しようとするものである。ビームは運動量(温度)と空間的広がりからなる 6 次元位相空間で定義されるが、力学的に体積を変えずに、各自由度の広がりを制御することが可能である。リニアコライダーで必要となるビームのエミッタンス(各自由度における位相空間が張る面積)は、 $\varepsilon_x=10.0$  mm.rad,  $\varepsilon_y=0.025$  mm.rad,  $\varepsilon_z=370$  mm であり、 $x$  は小さい値、 $y$  は極小値、そして  $z$  方向は大きいという特徴がある。ビームを、生成が容易な各々の自由度において中庸なサイズで生成し、自由度間の制御により、最終的に  $y$  が極小な形とする。本研究では高エネルギー加速器研究機構(KEK)の超伝導リニアック試験施設(STF)での実験を念頭に、シミュレーションによる検討をおこなった。

本論文 1 章では加速器の変遷と特徴について概要を説明する。2 章ではエミッタンス交換による高ルミノシティビームの生成に関する説明と、高ルミノシティの恩恵についての説明を行う。3 章では位相空間技術である RFBT と TLEX の原理とその周辺の事項を説明する。4 章では STF のビームライン構成とシミュレーションの原理および結果を示し、得られた結果について理論と比較しながら考察を記す。5 章で本研究の結論を述べる。

## 目次

要旨	2
目次	3
1. 序論	4
2. ルミノシティとエミッタンス交換	5
3. エミッタンス交換	
3.1 エミッタンス	
3.2 x-y エミッタンス交換	
3.3 x-z エミッタンス交換	
4. シミュレーション	
4.1 シミュレーション方法とビームライン	
4.2 x-y エミッタンス交換の確認	
4.3 RFBT と TLEX の接続	
4.4 理論値との比較と考察	
5. まとめ	
6. 参考文献	

## 1.序論

本章では加速器の変遷と特徴について【1】-1章に従って説明する。

加速器は荷電粒子のエネルギーを外部的に増大させることで粒子の微細構造や未知の現象を観測することを目的とした装置である。

加速器の歴史は、現在も幅広い分野で活用されている、粒子を一定の電場をかけて走らせる「静電型加速器」にはじまり、高エネルギー加速器で採用されている、電場を時間的に変化させ繰り返し加速させることで加速エネルギーを高める「高周波加速器=RF 加速器」に至るまで変遷を遂げてきた。

加速器の種類には Synchrotron や Cyclotron など、粒子が円形軌道を描きながら加速される「円形加速器」、加速空洞を直線状に並べて内部に RF を閉じ込めて加速電場を作ることで円形加速器に特有のシンクロトン放射による加速限界の制限を克服した「線形加速器」がある。

加速器の利用方法としては加速粒子を固定標的に打ち込む「固定標的型」と、同じ運動量の大きさを持つ粒子同士を正面衝突させることにより重心系のエネルギーを最大化する「コライダー」がある。固定標的型は反応確率や操作性がコライダーより優れており、かつ温度や電磁場などの実験条件の詳細な制御が可能であるため粒子生成や原子核反応などの比較的低エネルギーでイベント数を稼ぎたい場合に用いられる。一方コライダーは加速された粒子同士の衝突なので高エネルギー現象を観測したい場合に用いられる。

昨今の最先端研究では、2012年にヒッグス粒子を発見した CERN(欧州原子核研究機構)の LHC(Large Hadron Collider)加速器をはじめとする大型 RF 加速器の活躍が目覚ましい。

より高エネルギー、高ルミノシティをもつ加速器の開発が求められる風潮の中、注目を集めたものが電子・陽電子リニアコライダーである。リニアコライダーは1965年に M.Tigner によって考案され、線形加速器で粒子を加速するため前述の通りシンクロトン放射によるエネルギー損失が無くエネルギーは加速勾配と敷地面積で決まるため、リングコライダーに比べてエネルギー効率が良い。また加速器の建設コストは円形加速器の場合、加速器エネルギーの4乗に比例する(【1】-1.23)ため既に必要とされる加速エネルギーが限界を迎えている状況ではコストを抑えることが難しい。一方リニアコライダーの場合コストは加速空洞の数に比例するため、設計をコンパクトにすることでコストを抑えることができる。

コライダーの設計においてルミノシティ(反応レートを断面積で規格化した値 単位： $m^{-2}s^{-1}$ )を大きくすることが課題となってくる。

リニアコライダーのルミノシティは

$$L = \frac{fN^2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \quad (1-1)$$

$f$ は衝突周波数、 $N$ はバンチ内粒子数、 $\sigma_x, \sigma_y$ はそれぞれ衝突点における x 方向、y 方向のビームサイズである。【1】-(7.2)

リニアコライダーでは粒子は所定のエネルギーまで加速した後に衝突点に送られ、衝突後は捨てられてしまうためビーム電流が大きく制限される。ルミノシティはビーム電流に比例し衝突点のビームサイズに反比例するため、コライダーにおいてビーム電流を大きくすることはそれに比例して必要な電力も大きくなることから賢明ではない。従って現実的な電力で高ルミノシティを実現させるには衝突点におけるビームサイズを極小化する必要がある。ここで注意すべきは Beamstrahlung と呼ばれる現象である。Beamstrahlung とはビーム間の相互作用の一つであり、ビームの周りに発生した磁束密度によって衝突相手が曲げられることでシンクロトロン放射によるエネルギー損失を起こしてエネルギーの広がりを作ってしまう現象であり、コライダーの実験において避けるべき現象である。Beamstrahlung によるエネルギー広がり

$$\Delta E \propto \frac{1}{(\sigma_x + \sigma_y)^2 \sigma_z} \quad (1-2)$$

で表される。シンクロトロン放射の原因となるのはビームのつくる磁場であるが、ビームのつくる磁場はビームの面積ではなくビームを囲む領域の周長に反比例するため、このような式になる。従って Beamstrahlung を抑制しつつ高エミッタンスを実現するには  $\sigma_x \gg \sigma_y$  となるような扁平ビームを用いる必要がある。

現在日本での建設が検討されている国際リニアコライダー ILC(International Linear Collider)では電子ビームを周長 3km の DR(Damping Ring)に蓄積し、放射減衰によって  $\varepsilon_x=10 \text{ mm mrad}$ ,  $\varepsilon_y=0.04 \text{ mm mrad}$  の非対称エミッタンスビームを作り、これを線形加速器で加速して衝突点において  $\sigma_x=640 \text{ nm}$ ,  $\sigma_y=5.7\text{mm}$  の扁平ビームを生成する設計だが、加速器の構成を簡略化するための代替案として DR を取り払い、エミッタンス交換技術によって非対称エミッタンスビームを生成することを考えられている。[1]

本研究では STF のビームラインに対し、シミュレーションにより RFBT と TLEX を確認して扁平ビームを生成することを検討する。

## 2.ルミノシティとエミッタンス交換

コライダーにおいて、ある反応の起きる度合い(反応断面積)を  $\sigma$  (m<sup>2</sup>)として、単位時間当たりにある反応が起きる回数  $N$ (1/s)は

$$N = L\sigma \quad (2-1)$$

であり、ここで  $L$ (1/sm<sup>2</sup>)がルミノシティである。リニアコライダーのルミノシティは(1-1)で示した通りである。ビームのバンチ内にいくつの粒子が存在しているか、衝突点でビームサイズがどの程度小さくなっているかによって決まってくる。

一般に反応の確率密度関数がガウス分布に従うとき、真値  $\bar{\mu}$ からのずれ幅は  $N$  回測定した時の平均値を  $\mu$ として、標準偏差  $\sigma$ により

$$\bar{\mu} - \mu = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (2-2)$$

と与えられる。すなわち、現象を測定する回数の二乗根に反比例して精度は向上するため、より多数回の現象を観測することは、実験物理にとって本質的に重要である。ある反応の生じる断面積は自然が支配する物理法則により決まっているため、ある現象の生じる時間当たりの回数を高める方法は、唯一、ルミノシティを高めること以外にない。ルミノシティはコライダーの性能を表す指標である。

前章で述べた Beamstrahlung によるエネルギー広がりを抑制しつつ、高ルミノシティのビームを生成するには  $\epsilon_x \gg \epsilon_y$  の非対称エミッタンスで  $\sigma_x \gg \sigma_y$  の扁平ビームを生成する必要がある。このビームを生成する方法が位相回転技術である。次章では位相回転技術である RFBT と TLEX についての詳細を説明する。

### 3. エミッタンス交換

本章では【2】を参考に RFBT と TLEX について説明する。RFBT、TLEX はそれぞれ x-y、x-z 方向の位相回転技術である。

#### 3.1 エミッタンス

以下【2】1.2~3.3 に従って説明をする。一般的に加速器物理ではビームライン(縦方向)に s 軸を設定し、s 軸に直交する座標系を x,y、並行する座標系を z と定義する。

単粒子の座標は直交座標系(x,y,z)で表され、横方向運動量を縦方向運動量で規格化したも

のを x',y'で表す。(x' =  $\frac{px}{pz}$  y' =  $\frac{py}{pz}$ )

ビーム内のすべての粒子は 6 次元位相空間(x,p<sub>x</sub>,y,p<sub>y</sub>,z,p<sub>z</sub>)での点として表すことができ、粒子集団がこの空間に占める体積(4次元位相空間では面積)をエミッタンスという。

⟨ ⟩ を全粒子の平均として x 方向正規化エミッタンスは、粒子質量を m、光速を c を用いて以下の式で表される。

$$\varepsilon_{nx} = \frac{1}{mc} \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle - \langle xp_x \rangle^2} \quad (3-1)$$

散逸力(加熱や冷却)が無い系では、リウヴィルの定理のため、粒子の占める六次元位相空間の体積は不変である。また、相互作用が線形である場合には、(3-1)式で定義される量は運動の恒量となる。これ Courant-Snyder invariant またはエミッタンスと呼ぶ。ここで運動量を無次元化して(3-1)を書き直すと幾何エミッタンスは

$$\varepsilon_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} \quad (3-2)$$

となる。これをビーム行列を用いて説明する。粒子の座標を以下のように表す。

$$U = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ z' \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

同じ成分を持つ行ベクトルと列ベクトルの積をとり、その統計平均をとったものをビーム行列といい、次のように表される。

$$\Sigma = \langle U\tilde{U} \rangle = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xx' \rangle & \langle xy \rangle & \langle xy' \rangle & \langle xz \rangle & \langle xz' \rangle \\ \langle x'x \rangle & \langle x'^2 \rangle & \langle x'y \rangle & \langle x'y' \rangle & \langle x'z \rangle & \langle x'z' \rangle \\ \langle yx \rangle & \langle yx' \rangle & \langle y^2 \rangle & \langle yy' \rangle & \langle yz \rangle & \langle yz' \rangle \\ \langle y'x \rangle & \langle y'x' \rangle & \langle y'x' \rangle & \langle y'y' \rangle & \langle y'z \rangle & \langle y'z' \rangle \\ \langle zx \rangle & \langle zx' \rangle & \langle zy \rangle & \langle zy' \rangle & \langle z^2 \rangle & \langle zz' \rangle \\ \langle z'x \rangle & \langle z'x' \rangle & \langle z'y \rangle & \langle z'y' \rangle & \langle z'z \rangle & \langle z'^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

この行列式の平方根が6次元位相空間のエミッタンスに相当する。

各自由度のエミッタンスは、上式における対角2×2成分の行列式の平方根として与えられ、

$$\varepsilon_i = \begin{vmatrix} \langle i^2 \rangle & \langle ii' \rangle \\ \langle i'i \rangle & \langle i'^2 \rangle \end{vmatrix} = \sqrt{\langle i^2 \rangle \langle i'^2 \rangle - \langle ii' \rangle^2} \quad (i = x, y, z) \quad (3-5)$$

となる。幾何エミッタンスは、運動量を角度表示し、エネルギー依存するため加速前後で

エミッタンスは変化する。ここでローレンツ因子  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\gamma = \sqrt{1 + (\frac{p}{m_0 c})^2}$  を用いると、正規

化エミッタンスと非正規化エミッタンスの関係は以下のとおりである。

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ni} \frac{mc}{p_z} \approx \frac{\varepsilon_{nx}}{\beta\gamma} \quad (3-6)$$

従って非正規化エミッタンスにローレンツ因子をかけることでエネルギー依存性を除去できる。この値が正規化エミッタンスである。

加速器内の粒子の横方向運動方程式は  $u=x, y$ ,  $k$  を外部場による関数(一定)として

$$u'' + k(z)u = 0 \quad (3-7)$$

$A(z)$  と  $B(z)$  が(3-7)の独立した2解であると仮定する。境界条件を以下の式で設定する。

$$A(z_0) = B'(z_0) = 1$$

$$A'(z_0) = B(z_0) = 0 \quad (3-8)$$

任意の解は

$$u(z) = A(z)u(z_0) + B(z)u'(z_0)$$

$$u'(z) = A'(z)u(z_0) + B'(z)u'(z_0) \quad (3-9)$$

$z_0 \sim z$  での転送行列  $M$  は

$$M(z|z_0) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ A'(z) & B'(z) \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

で表せる。ビーム輸送において転送前の  $\Sigma$  行列を  $\Sigma_0$ 、転送後の  $\Sigma$  行列を  $\Sigma_1$  とすると

$$\Sigma_1 = M \Sigma_0 \tilde{M} \quad (3-11)$$

の関係性がある。また、 $|M|=1$  であり、(3-10)式を用いると(3-9)式は

$$u(z) = M(z|z_0)U(z_0) \quad U(z) = \begin{pmatrix} u(z) \\ u'(z) \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

$M$  はビームライン要素のみに依存するので、 $M(z_n|z_0) = M(z_n|z_{n-1}) \cdots M(z_2|z_1)M(z_1|z_0)$  と書けるので、実数  $k$  について

( $k > 0$  のとき)転送行列は

$$M(z_1|z_0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \frac{\sin\varphi}{\sqrt{k}} \\ -\sqrt{k}\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \varphi = (z_1 - z_0)\sqrt{k} \quad (3-13)$$

( $k < 0$  のとき)転送行列は

$$M(z_1|z_0) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \frac{\sinh\varphi}{\sqrt{k}} \\ -\sqrt{k}\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \quad \varphi = (z_1 - z_0)\sqrt{k} \quad (3-14)$$

と表せる。

ドリフト空間(外力の働いていない)の場合は  $k=0$  であり

$$M(z|z_0) = \begin{pmatrix} 1 & z - z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

quadrupole では長さ  $\ell = z - z_0$  強度( $k$ )の場合、焦点距離  $f$  が  $\ell$  に比べて十分大きく、thin-lens 近似を用いると

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad -1/f = k\ell \quad (3-16)$$

となる。

ここでハミルトニアン $H$ の運動方程式 $q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$   $p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$  に初期値 $q_{i0}, p_{i0}$ を与え、時刻 $t$ を考慮

した解の形 $q_i = q_i(q_{i0}, p_{i0}, t)$  ,  $p_i = p_i(q_{i0}, p_{i0}, t)$ について  $6 \times 6$  転送行列 $M_6$ は

$$M_6 = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial q_{10}} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial q_{30}} \\ \frac{\partial q_{10}}{\partial q_{10}} & \ddots & \frac{\partial q_{30}}{\partial q_{10}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_{10}} & \cdots & \frac{\partial p_3}{\partial q_{30}} \\ \frac{\partial q_{10}}{\partial q_{10}} & \cdots & \frac{\partial q_{30}}{\partial q_{30}} \end{pmatrix} \quad (3-17)$$

また、上式は $\tilde{M}_6 J_6 M_6 = J_6$ を満たし、 $J_6$ はシンプレティック行列であり単位シンプレティック行列 $J$ を用いて

$$J_6 = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-18)$$

と表せる。

同様に 4次元位相空間 $(x, P_x, y, P_y)$ につて $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$ のとき

$$M_4 = P^{-1}M_4P \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (3-19)$$

また、上式は $\widetilde{M}_4 J_4 M_4 = J_4$ を満たし、 $J_4$ はシンプレティック行列であり単位シンプレティック行列 $J$ を用いて

$$J_4 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad (3-20)$$

また、 $M$ はシンプレティック行列で $|M|=1$ の場合ビーム輸送によって $\Sigma$ 行列の行列式は不変であり、エミッタンスは $\Sigma$ 行列の行列式の平方根であるので保存される。しかし加減速によって $|M| \neq 1$ の場合はエミッタンスは保存されない。

### 3.2 x-y エミッタンス交換

(1-1)および(1-2)式より、ビームの xy 自由度間における大きな非対称性が必要であり、この扁平ビームを実現するためには2つのアプローチがある。1つはフラットレーザーポットを使用して非対称電子ビームを直接カソードに生成する方法。もう一方は位相回転技術(RFBT)である。前者で得られる非対称エミッタンスは要求値を下回ってしまうことに加えて複雑な加速構造が必要で現実的でないため後者を用いる。

RFBTの構成は電子ビームをソレノイド磁場中のカソードで生成し xy 間に角運動量による相関を持たせ、この際に生じた見かけのエミッタンス増大をビームライン下流に Skew Quadrupole (通常の quadrupole を 45 度傾けたもの) を3つ設けることで解消するというものである。結果としてこの一連の過程によって xy 間に非対称エミッタンス生まれる。

空間電荷、ビームエミッタンス、角運動量、外部電磁集束などの要因によって電子ビームの振る舞いは決まる。

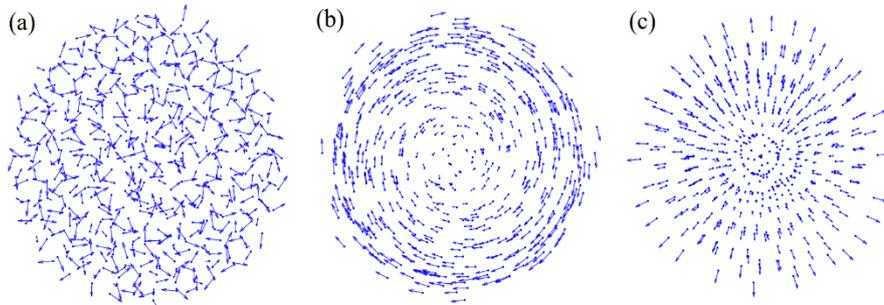


図 3.1 ビーム内の粒子の振る舞いの様子(a)エミッタンス支配下(b)角運動量支配下(c)空間電荷支配下 【2】 P.29 から引用

図 3.1 は各支配下におけるビーム内の粒子の振る舞いをモデル化したものである。各点が粒子の位置を、矢印の長さが粒子の速さを示している。(a)エミッタンス支配下では電子はランダムに動く。(b)角運動量支配下では電子は渦パターンを描きながら動き、外周ほど速さは大きい。(c)空間電荷支配下ではクーロン力による斥力を受け、電子は放射状に広がる。このことから xy に相関を持たせながらビームの散逸を防ぐためには、ビームを角運動量支配下でコントロールしつつ空間電荷効果を抑制して輸送する必要があることが視覚的に分かる。

横方向のバンチビームサイズ  $\sigma$  の変化は外部電磁力がない場合以下の式で表せる。

$$\sigma'' - \frac{k}{4\sigma} - \frac{\varepsilon_u^2}{\sigma^3} - \frac{L^2}{\sigma^3} = 0 \quad (3-21)$$

$k$  は perveance と呼ばれる空間電荷の影響がビームの動きに及ぼす指標であり  $k = \frac{2I}{I_0\beta^3\gamma^3}$  で表される。 $I$  は瞬間ビーム電流の絶対値、 $I_0$  はアルヴェン電流(17kA)、 $\varepsilon_u$  は無相関な横方向エミッタンス(熱エミッタンス)、 $L$  は平均正準角運動量  $\langle L \rangle$  と縦方向運動量  $P_z$  を用いて  $L = \frac{\langle L \rangle}{P_z}$  である。(3-21)式について第 2 項が空間電荷、第 3 項がエミッタンス、第 4 項が角運動量の効果を反映している。第 4 項が第 2,3 項よりも遥かに大きい時、ビームは角運動量支配下であると言える。また、外部電磁線形収束がある場合は外部収束力  $k_0$  を用いて  $k_0\sigma$  が式に付加される。

(3-21)式から、カソード磁場はエミッタンスを最小化する際に取り除く必要があるが角運動量支配下のビームを生成するには磁場が必要である。

回転対称の場合、正準角運動量の保存はブッシュの定理から

$$L = \gamma m r^2 \dot{\varphi} + \frac{e}{2\pi} \Phi = const \quad (3-22)$$

(3-22)式は円筒座標系  $(r, \varphi, z)$  で記述されており、 $\Phi$  は特定の  $z$  に対応する半径  $r$  で囲まれた磁束である。 $\gamma m r^2 \dot{\varphi}$  はカソードで平均的に 0 ( $\because \dot{\varphi} = 0$ )、 $\frac{e}{2\pi} \Phi$  はビームが角運動量を得るために消えてはいけない。つまりカソードでの縦方向の磁場が必要である。従ってビームを角運動量支配下で生成するにはソレノイド磁場中にカソードを配置してビーム生成を行う必要がある。

以下、扁平ビームの生成について行列を用いて説明する。

横方向トレス空間の粒子座標を 2 つのベクトルで定義する。

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad (3-23)$$

これに対応する  $4 \times 4$  ビームマトリックスは

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \langle X\tilde{X} \rangle & \langle X\tilde{Y} \rangle \\ \langle Y\tilde{X} \rangle & \langle Y\tilde{Y} \rangle \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

R を 4×4 回転行列として、単位行列  $I$  を用いると

$$R = \begin{pmatrix} I\cos\theta & I\sin\theta \\ -I\sin\theta & I\cos\theta \end{pmatrix} \quad (3-25)$$

ビームが回転対称ならば、回転についてビームマトリックスは不変であるため

$$\Sigma = R\Sigma R^{-1} \quad (3-26)$$

が成立する。(3-26)式より

$$\langle X\tilde{X} \rangle \cos^2\theta + \langle Y\tilde{Y} \rangle \sin^2\theta + (\langle X\tilde{Y} \rangle + \langle Y\tilde{X} \rangle) \sin\theta \cos\theta = \langle X\tilde{X} \rangle \quad (3-27)$$

が成立する。 $\theta$  は任意であることから(3-27)式より

$$\langle X\tilde{X} \rangle = \langle Y\tilde{Y} \rangle \quad (3-28)$$

$$\langle X\tilde{Y} \rangle + \langle Y\tilde{X} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle X\tilde{Y} \rangle = -\langle Y\tilde{X} \rangle \quad (3-29)$$

が得られる。(3-28)、(3-29)の転置をとると

$$\langle \langle X\tilde{Y} \rangle \rangle = -\langle \langle Y\tilde{X} \rangle \rangle = -\langle X\tilde{Y} \rangle \quad (3-30)$$

が成立する。従って $\langle X\tilde{Y} \rangle$ は反対称行列で、シンプレティック単位行列  $J$  を用いて

$$\langle X\tilde{Y} \rangle = LJ \quad (3-31)$$

と書ける。つまり(3-31)式の左辺成分は粒子の角運動量を表す成分である。

$(x, x')$ 、 $(y, y')$  で記述される一般的な円形ビームマトリックスの対角成分 $\langle X\tilde{X} \rangle$ 、 $\langle Y\tilde{Y} \rangle$ はバンチを表していて

$$\langle X\tilde{X} \rangle = \langle Y\tilde{Y} \rangle = \varepsilon T_0 \quad (3-32)$$

と書ける。ここで $\varepsilon$ は横方向エミッタンス。 $T_0$ は Twiss Parameter  $\alpha, \beta$  を用いて

$$T_0 = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \frac{1+\alpha^2}{\beta} \end{pmatrix} \quad (3-33)$$

である。但し $|T_0| = 1$ である。(3-33)式と(3-31)式から一般的な円筒対称で角運動量をもつ 4×4 ビームマトリックスは

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon T_0 & LJ \\ -LJ & \varepsilon T_0 \end{pmatrix} \quad (3-34)$$

と書ける。よって  $M$  をシンプレティックな転送行列とすると転送後のビームマトリックスは(3-11)式から

$$\Sigma = M\Sigma_0\tilde{M} \quad (3-35)$$

となるので、(3-35)式からシンプレティック変換に関する以下の2つの不変量が確認できる。**[3]** 3.17 式から

$$I_1 = \varepsilon_{4D} = \sqrt{|\Sigma|} \quad (3-36)$$

$$I_2(\Sigma) = \frac{-1}{2} T_r(J_4 \Sigma J_4 \Sigma) \quad (3-37)$$

ここで、転送行列  $M$  によって転送されたビームマトリックスが対角成分のみ残すとする

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_- T_- & 0 \\ 0 & \varepsilon_+ T_+ \end{pmatrix} \quad \text{また } T_{\pm} = \begin{pmatrix} \beta_{\pm} & -\alpha_{\pm} \\ -\alpha_{\pm} & \frac{1+\alpha_{\pm}}{\beta_{\pm}} \end{pmatrix} \quad (3-38)$$

となる。(3-36)を(3-35)に適用すると

$$\sqrt{|\Sigma|} = \sqrt{|\Sigma_0|} \Rightarrow \varepsilon_+ \varepsilon_- = \varepsilon^2 - \mathcal{L}^2 \quad (3-39)$$

が得られる。また  $J T_{0,\pm} J T_{0,\pm} = -I$  より

$$J_4 \Sigma_0 J_4 \Sigma_0 = \begin{pmatrix} -(\varepsilon^2 + \mathcal{L}^2)I & 0 \\ 0 & -(\varepsilon^2 + \mathcal{L}^2)I \end{pmatrix} \quad (3-40)$$

$$J_4 \Sigma J_4 \Sigma = \begin{pmatrix} -\varepsilon_-^2 I & 0 \\ 0 & -\varepsilon_+^2 I \end{pmatrix} \quad (3-41)$$

と求められる。これと(3-37)式から

$$I_2(\Sigma) = I_2(\Sigma_0) = \varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 = 2(\varepsilon^2 + \mathcal{L}^2) \quad (3-42)$$

(3-39)および(3-42)から

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \mathcal{L} \quad (3-43)$$

が求められる。従って(3-44)から、角運動量支配下でのビーム輸送によって非対称エミッタンスが生じ、熱エミッタンス  $\varepsilon$  と  $\mathcal{L}$  によって値が決まる。

ソレノイドによる扁平ビーム生成の場合、ソレノイド磁場中でカソードから  $\Sigma_0$  のビームマトリックスでビームを入力し、シンプレティック転送行列  $M$  を備えた Skew Quadrupole を設ける必要がある。

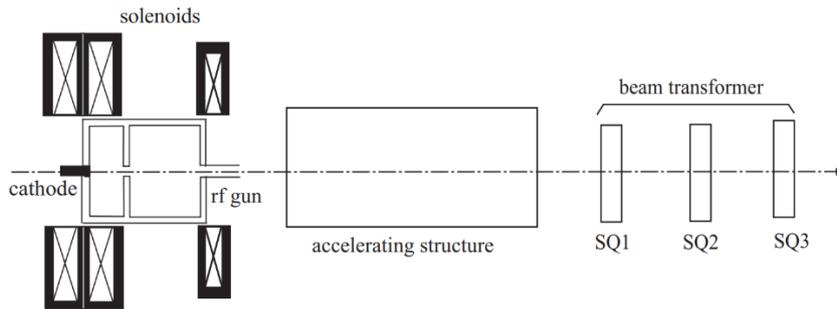


図 3.2 RFBT の構成概念図(【2】P26 図参照)

カソード表面での電子の座標は(3-23)とする。  $B_c$  をカソード上での縦方向磁束密度とする。Solenoid 出口では  $B_z = 0$ 。位相空間座標  $x', y'$  の変化  $\Delta x', \Delta y'$  は以下の式で与えられる。

$$\Delta x' = -ky \quad \Delta y' = kx \quad (3-45)$$

但し  $k = \frac{eB_c}{2P_z}$  である。これにより

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' - ky \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' + kx \end{pmatrix} \quad (3-46)$$

となる。

カソード表面に相関モーメントがない ( $\langle xx' \rangle = \langle xy \rangle = \dots = 0$ ) と仮定すると、ビームマトリックスは

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & k\sigma^2 \\ 0 & k^2\sigma^2 + \sigma'^2 & -k\sigma^2 & 0 \\ 0 & -k\sigma^2 & \sigma^2 & 0 \\ k\sigma^2 & 0 & 0 & k^2\sigma^2 + \sigma'^2 \end{pmatrix} \quad (3-47)$$

と表せる。但し  $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$ ,  $\sigma'^2 = \langle x'^2 \rangle = \langle y'^2 \rangle$  であり、(3-34)式と(3-47)式から

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= k\sigma^2 \\ \varepsilon &= \sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2} \quad (\varepsilon_u = \sigma\sigma') \\ \alpha &= 0 \\ \beta &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2}} \end{aligned} \quad (3-48)$$

となる。ここで  $\varepsilon_u$  は非相関横方向エミッタンス(熱エミッタンス)と解釈できる。

(3-43)から予想される扁平ビームエミッタンスは

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2} \pm \mathcal{L} \quad (3-49)$$

となり、 $\mathcal{L} \gg \varepsilon_u$  のとき

$$\begin{aligned} \varepsilon_+ &= 2\mathcal{L} & \varepsilon_- &= \frac{\varepsilon_u^2}{2\mathcal{L}} \\ \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} &\approx \left(\frac{2\mathcal{L}}{\varepsilon_u}\right)^2 \end{aligned} \quad (3-50)$$

以上により入力ビームマトリックス  $\Sigma_0$  から非対称エミッタンスを作ることができると示された。そのエミッタンス比は熱エミッタンスとソレノイド磁場が与える角運動量によって決まり、エミッタンス積は保存されている。

次にシンプレティック転送行列  $M$  によってビームマトリックスの非対角成分を 0 にするために Skew Quadrupole  $\times 3$  の構成について考える。

通常の Quadrupole  $\times 3$  の転送行列  $M_{NQ}$  は

$$M_{NQ} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (3-51)$$

と表せ、Skew Quadrupole  $\times 3$  の場合

$$M = R^{-1}M_{NQ}R \quad (3-52)$$

で表せる。(3-25)式で  $\theta = 45^\circ$  を代入すると上式は

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_+ & A_- \\ A_- & A_+ \end{pmatrix} \quad A_{\pm} = A \pm B \quad (3-53)$$

となる。(3-35)式で与えられる、Skew Quadrupole×3 出口でのビームマトリックスの非対角成分が0となるためにはXYカップリングコンポーネントが消えて

$$\varepsilon(A_+T_0\widetilde{A}_- + A_-T_0\widetilde{A}_+) + \mathcal{L}(A_+J\widetilde{A}_+ - A_-J\widetilde{A}_-) = 0 \quad (3-54)$$

となる。これを解くためにシンプレティック行列  $S$  を用いた条件

$$A_- = A_+S \quad (3-55)$$

を用いて(3-54)式を解くと、(3-54)式の第2項は $|S|=1$ であることから消えて、第1項も条件

$$T_0\widetilde{S} + S\widetilde{T}_0 = 0 \quad (3-56)$$

を満たすとき0となる。 $T_0$ は対称であるため上式から

$$ST_0 = -T_0\widetilde{S} = -S\widetilde{T}_0 \quad (3-57)$$

つまり $ST_0$ は反対称行列であり、一方 $|T_0| = |S| = 1$ であるから $ST_0 = \pm J$ となる。従って

$$S = \pm JT_0^{-1} = \pm \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ \frac{1+\alpha^2}{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \quad (3-58)$$

と置ける。これを(3-32)式と(3-33)式で比べると、 $S$ は回転対称なビームの $\langle X\bar{X} \rangle$ によって決定されることが分かる。

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \Sigma_{12} & -\Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} & \Sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3-59)$$

Skew Quadrupole×3 による転送後ビームマトリックスの対角成分 $\langle XX \rangle, \langle YY \rangle$ は

$$2\Sigma_{XX,YY} = \varepsilon(A_+T_0\widetilde{A}_+ + A_-T_0\widetilde{A}_-) \mp \mathcal{L}(A_+J\widetilde{A}_- - A_-J\widetilde{A}_+) \quad (3-60)$$

となる。但し、 $ST_0\widetilde{S} = T_0$ と $J\widetilde{S} = -SJ = \pm T_0$ は(3-58)式の $S$ の符号によって決まる。従って

Skew Quadrupole×3 出口でのビームマトリックスは $S > 0$ として( $S < 0$ のときはビームが狭くなる)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_- T & 0 \\ 0 & \varepsilon_+ T \end{pmatrix} \quad (3-61)$$

と表せ、 $T = \frac{1}{2}A_+T_0\widetilde{A}_+$ 、 $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \mathcal{L}$ である。 $T_0$ が対称であったとしても $T$ は必ずしも対称ではない。但し  $M$  のシンプレティック条件から

$$\left| \frac{A_+}{2} \right| = \left| \frac{A_-}{2} \right|, \quad \left| \frac{A_+}{2} \right| + \left| \frac{A_-}{2} \right| = 1 \Rightarrow |A_{\pm}| = 2 \Rightarrow |T| = 1 \quad (3-62)$$

が成立する。

Skew Quadrupole×3 が(3-55)を満たすことを示す。通常の Quadrupole×3 の thin-lens 近似での  $2 \times 2$  転送行列は

$$Q(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \quad (3-63)$$

で与えられる。 $q$ は quadrupole strength であり quadrupole の焦点距離  $f$ を用いて $q = \frac{1}{f}$ と表せる。他の表現としては横方向運動量  $P$ 、磁場勾配  $g$ 、quadrupole の有効長 $l_{eff}$ を用いて

$$q[1/m] = \frac{300g[T/m]l_{eff}[m]}{PC[MeV]} \quad (3-64)$$

と表せる。ドリフト空間の  $2 \times 2$  転送行列は

$$D(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-65)$$

である。3つの Skew Quadrupole を SQ(1),SQ(2),SQ(3)とした時、SQ(1)と SQ(2)間の距離を  $d_2$ 、SQ(2)と SQ(3)間の距離を $d_3$ と設定する。skew Q channel の転送行列において横方向

行列  $A$ が $(x,x)$ 位相空間で与えられるとき電子の座標は $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$ は $U(z_f) = M_4 U(z_i)$ より

$AX_0$ を介して変換され、 $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$ は $BX_0$ を介して変換されて  $A$ と逆符号なので

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-66)$$

$$B = A(-q_1, -q_2, -q_3, d_2, d_3) \quad (3-67)$$

と書ける。(3-66)式と(3-67)式を(3-55)式に代入して $q_i(i = 1,2,3)$ について解くと

【2】 3.50 式より

$$q_1 = \pm \sqrt{\frac{-d_2 S_{11} + S_{12} - d_2 d_T S_{21} + d_T S_{22}}{d_2 d_T S_{12}}}$$

$$q_2 = -\frac{S_{12} + d_T S_{22}}{d_2 d_3 (1 + S_{12} q_1)}$$

$$q_3 = -\frac{q_1 + q_2 + d_2 S_{11} q_1 q_2 + S_{21}}{1 + (d_T q_1 + d_3 q_2) S_{11} + d_2 d_3 q_2 (S_{21} + q_1)} \quad (3-68)$$

と導かれる。 $S_{ij}$ は  $S$ の  $ij$ 成分で、 $d_T = d_2 + d_3$ 、 $S$ は相関行列で $S^{co}$ と定義され、

$$Y = S^{co} X \quad (3-69)$$

のように  $xy$  の相関を示す行列であり、熱エミッタンスが0のとき $S^{co} = S$  ( $\Sigma_0$ の式で $\sigma' = 0$ )となる。

### 3.3 x-z エミッタンス交換

これまで  $xy$  の非対称性に関して RFBT の技術を用いて説明してきたが、実際のビーム輸

送において理想的なエミッタンスの振り分けを行う事は難しい。これには様々な要因が関係しているが、その一つにクーロン力由来の空間電荷効果が考えられる。この非線形効果によってエミッタンスの積は保存されるが個々のエミッタンスは単純な保存量ではなくなりエミッタンス増大が生じる。従って RFBT による転送後の非対称エミッタンス( $\epsilon_x \gg \epsilon_y$ )は $\epsilon_y$ が要求値であった場合 $\epsilon_x$ が過大となってしまう。これを解決するための技術が TLEX である。TLEX は  $xz$  の位相空間分布を入れ替える技術であり、過大となった $\epsilon_x$ を  $z$  方向に逃がすことができる。

以下、本節は【4】【5】【6】【7】を参照している。TLEX は EEX(Emittance EXchanger)と呼ばれるビームラインを使用する。以下に EEX の構成を図示する。

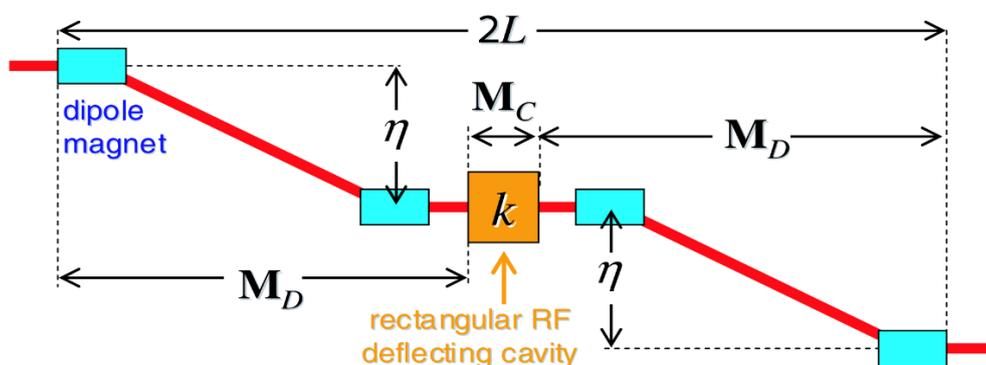


図 3.3 EEX の構成【4】P4 図から引用

Dipole Magnet の幅を  $D$ 、 $S_1$  を Dipole Magnet1 と Dipole Magnet 2 間の距離、 $S_2$  を Dipole Magnet2 と Cavity 間の距離、 $\theta$  を曲げ角、 $L_c$  を Cavity の長さとする。4 次元単粒子ベクトルを  $S=(x,x',z,\delta)$  とする。但し  $\delta=\Delta E/E$  は設計エネルギー  $E$  からのずれ  $\Delta E$  の割合を表す。

EEX 通過前の  $x$  と  $z$  空間でのビームエミッタンスをそれぞれ  $\epsilon_{0x}, \epsilon_{0z}$  とすると、通過後のビームエミッタンス  $\epsilon_{1x}, \epsilon_{1z}$  は

$$\epsilon_{1x} = \epsilon_{0z} \quad (3-70)$$

$$\epsilon_{1z} = \epsilon_{0x} \quad (3-71)$$

と書ける。Dogleg の転送行列  $M_D$  は

$$M_D(\eta, \xi, L) = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 1 & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-72)$$

と与えられる。ここで  $\eta$  は dispersion function(分散関数)、 $\xi$  は momentum compaction factor(運動量圧縮係数)であり

$$\eta = \frac{S_1 \sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{2D}{\sin \theta} \left( \frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) \quad (3-73)$$

$$\xi = \frac{S_1 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{2D}{\sin \theta} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \theta \right) \quad (3-74)$$

$$L = \frac{S_1}{\cos^3 \theta} + \frac{2D}{\cos \theta} + S_2 \quad (3-75)$$

と書け、Dogleg 通過前のエネルギー広がり $\delta_0 = \frac{\Delta E_0}{E}$ のとき、Dogleg 通過後の $x_1, z_1$ に対して

$$\Delta x_1 = \eta \frac{\Delta E_0}{E} \quad \Delta z_1 = \xi \frac{\Delta E_0}{E} \quad (3-76)$$

の位置変化をもたらす。

次に Dipole モード Cavity の転送行列 $M_c$ は

$$M_c(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-77)$$

と与えられる。 $k$ は Cavity の振幅を表すパラメータで、アイリス径 $a$ 、Cavity 中心から $a/2$ の位置での加速電圧 $V_0$ 、ビームエネルギー(電圧表示) $E$ を用いて

$$k \equiv \frac{V_0}{aE} \quad (3-78)$$

と定義される(【7】(30)式)。EEX 全体での転送行列 $M_{EEX}$ は

$$M_{EEX} = M_D M_C M_D \quad (3-79)$$

より、(3-72)式と(3-77)式を(3-79)式に代入すると

$$M_{EEX} = \begin{pmatrix} 1 + k\eta & 2L(1 + k\eta) & kL & \eta(1 + k\eta) + \eta + \xi kL \\ 0 & 1 + k\eta & k & k\xi \\ k\xi & \eta(1 + k\eta) + \eta + \xi kL & 1 + k\eta & 2\xi(1 + k\eta) \\ k & kL & 0 & 1 + k\eta \end{pmatrix} \quad (3-80)$$

が導かれる。これに対角成分を除去するための整合条件

$$1 + k\eta = 0 \quad (3-81)$$

を(3-80)式に適用すると、 $k$ を消去した形で

$$M_{EEX} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{L}{\eta} & \eta - \frac{\xi L}{\eta} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\eta} & -\frac{\xi}{L} \\ -\frac{\xi}{\eta} & \eta - \frac{\xi L}{\eta} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\eta} & -\frac{L}{\eta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-82)$$

と書ける。上式は Dogleg のパラメータのみで記述されており、対角成分の行列式が0、非対角成分の行列式が1であることから TLEX 通過後の  $x, z$  位相空間はそれぞれ通過前の  $z, x$  位相空間が転送されたものであることが分かり、エミッタンスの大きさは不変であるため(3-70),(3-71)式が成り立っていることが分かる。TLEX 入り口での粒子状態 $S_i$ 、TLEX

出口での粒子状態 $S_f$ の関係性は $S_f = M_{EEX}S_i$ であるため

$$S_f = \begin{pmatrix} x_f \\ x'_f \\ z_f \\ \delta_f \end{pmatrix} = M_{EEX} \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \\ z_i \\ \delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{L}{\eta}z_i + \left(\eta - \frac{\xi L}{\eta}\right)\delta_i \\ -\frac{1}{\eta}z_i - \frac{\xi}{\eta}\delta_i \\ -\frac{\xi}{\eta}x_i + \left(\eta - \frac{\xi L}{\eta}\right)x'_i \\ -\frac{1}{\eta}x_i - \frac{L}{\eta}x'_i \end{pmatrix} \quad (3-83)$$

と書け、エミッタンスの積は保存されるが各変数の値は EEX の設計によって決定される。

次に **【8】(13)~(25)**の式変形に習って thck lens 近似を用いる場合、すなわち Cavity が有限長の場合を考える。この時の Cavity の転送行列は以下のとおりである。

$$M_C^{thick} = \begin{pmatrix} 1 & L_C & kL_C/2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & kL_C & Nk^2L_C & k \end{pmatrix} \quad (3-84)$$

但し定数  $N$  は Cavity 内のセル数  $n$  を用いて  $N = \frac{1+2n^2}{12n^2}$  と表せる。EEX 全体の転送行列は

(3-79)と同様にして

$$M_{EEX}^{thick} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (3-85)$$

と表せる。ここで各行列成分  $A, B, C, D$  は

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & L_C/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B &= -\frac{1}{4\eta} \begin{pmatrix} L_C + 4L & 4\xi L - 4\eta^2 + \xi L_C \\ 1 & \xi \end{pmatrix} \\ C &= B^T \\ D &= \frac{L_C}{4\eta^2} \begin{pmatrix} \xi & \xi^2 \\ 1 & \xi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-86)$$

であり、thin lens 近似の場合は  $L_C = 0$  となるので  $A=D=0$ 。従って(3-85)式の対角成分が 0 になる。

EEX の転送行列の行列式は

$$\det|M_{EEX}^{thick}| = \eta^2 \quad (3-87)$$

である。従ってエミッタンスの積が保存されるためには  $\eta=1$  でなければならない。

次に EEX 通過後のビームマトリックスを考える。通過前のビームマトリックスは Twiss Parameter を用いて

$$\Sigma_0 = \varepsilon_{i0} \begin{pmatrix} \beta_{i0} & -\alpha_{i0} \\ -\alpha_{i0} & (1 + \alpha_{i0}^2)/\beta_{i0} \end{pmatrix} \quad (3-88)$$

と表せて、(3-85)式から EEX 通過後のビームマトリックスは以下の式で表せる。

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} A\Sigma_{x0}A^T + B\Sigma_{z0}B^T & A\Sigma_{x0}C^T + B\Sigma_{z0}D^T \\ C\Sigma_{x0}A^T + D\Sigma_{z0}B^T & C\Sigma_{x0}C^T + D\Sigma_{z0}D^T \end{pmatrix} \quad (3-89)$$

x 方向の規格化エミッタンスについて上式の対角成分を計算すると

$$\varepsilon_{x1}^2 = |A\Sigma_{x0}A^T + B\Sigma_{z0}B^T| \quad (3-90)$$

これを  $|X+Y| = |X| + |Y| + \text{tr}(J^{-1}X^T J Y)$  の展開式を用いて計算すると

$$\varepsilon_{x1}^2 = |A|^2 \varepsilon_{x0}^2 + |B|^2 \varepsilon_{z0}^2 + \text{tr}\{(A\Sigma_{x0}A^T)B\Sigma_{z0}B^T\} \quad (3-91)$$

となる。ここで  $i=x,z$  として

$$Q_{i0} \equiv \frac{1}{\sqrt{\beta_{i0}}} \begin{pmatrix} \beta_{i0} & 0 \\ -\alpha_{i0} & 1 \end{pmatrix} \quad (3-92)$$

を導入すると EEX 前のビームマトリックスは

$$\Sigma_{x0} = \varepsilon_{x0} Q_{x0} Q_{x0}^T \quad (3-93)$$

と表せる。ここで行列  $U$  を

$$U \equiv Q_{x0}^{-1} J^{-1} A J B Q_{z0} \quad (3-94)$$

で定義すると(3-91)式は

$$\varepsilon_{x1}^2 = |A|^2 \varepsilon_{x0}^2 + |B|^2 \varepsilon_{z0}^2 + \varepsilon_{x0} \varepsilon_{z0} \text{tr}(U U^T) \quad (3-95)$$

と書ける。またビームマトリックスの各成分がシンプレティック行列の場合、

$|A|+|C|=1$ 、 $|A|=|D|$ 、 $|B|=|C|$  の関係が成り立つ。また、 $\text{tr}(U U^T) \equiv \lambda^2 (\geq 0)$  とすると

$$\varepsilon_{x1}^2 = |A|^2 \varepsilon_{x0}^2 + (1 - |A|)^2 \varepsilon_{z0}^2 + \varepsilon_{x0} \varepsilon_{z0} \lambda^2 \quad (3-96)$$

と書ける。z 方向のエミッタンスも同様にして

$$\varepsilon_{z1}^2 = (1 - |A|)^2 \varepsilon_{x0}^2 + |A|^2 \varepsilon_{z0}^2 + \varepsilon_{x0} \varepsilon_{z0} \lambda^2 \quad (3-97)$$

となる。従って thick lens 近似を適用すると以下の式で書き直せる。

$$\varepsilon_{x1}^2 = \varepsilon_{z0}^2 (1 + \rho_0 \lambda^2) \quad \varepsilon_{z1}^2 = \varepsilon_{x0}^2 \left(1 + \lambda^2 / \rho_0\right) \quad (3-98)$$

但し、 $\rho_0 = \varepsilon_{x0} / \varepsilon_{z0}$  である。また  $\lambda^2$  は EEX の各パラメータを用いて

$$\lambda^2 = \frac{L_C^2 (1 + \alpha_{x0}^2) (\xi^2 + (\xi \alpha_{z0} - 2\beta_{z0})^2)}{64\eta^2 \beta_{x0} \beta_{z0}} \quad (3-99)$$

である。また、 $\lambda$  はエミッタンス増大因子と呼ばれ、 $L_C > 0$  のときエミッタンス増大が生じることが分かる。また、thin lens 近似の場合は(3-70)式(3-71)式が成立し、完全なエミッタンス交換が可能になる。

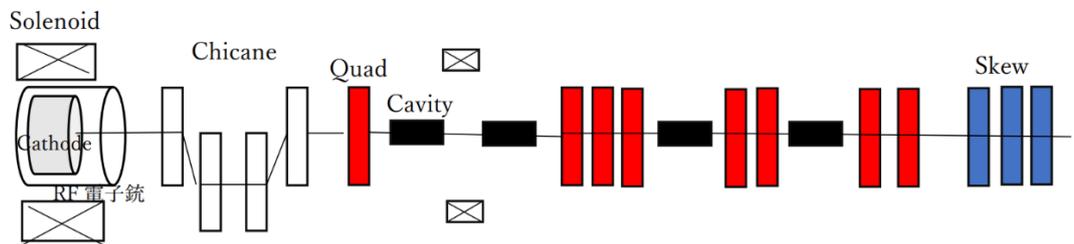
## 4. シミュレーション

本章ではシミュレーションに用いたビームラインの設計とシミュレーション方法およびシミュレーション結果について記述する。

### 4.1 シミュレーション方法とビームライン

以下に本研究でシミュレーションする STF のビームライン(概要図)を示す。

#### 【RFBT】



#### 【TLEX】

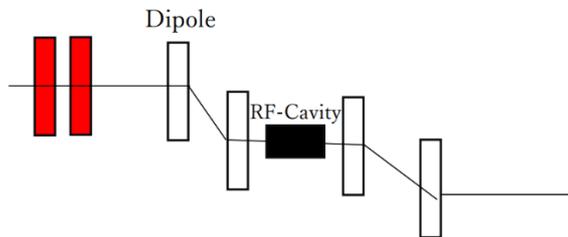


図 4.1 STF ビームラインの概念図

光電陰極 RF-電子銃は、加速器の電子源に光電陰極を使用し、rf 加速場に直接挿入する装置である。これを使用するメリットとしては、高輝度電子ビームを得られること。初期電子分布を制御できること。ドライブレーザーパラメータを調整することで横方向エミッタンスを最適化できること。超短パルスレーザー光が利用でき、バンチ長を rf 波長より十分に短くでき複雑なバンチングスキームを除去できること。などがあげられる。また、熱電子陰極を使用した場合に比べて 2 桁高い電荷密度を成し遂げることができるため実用性が高い。

実際の STF ビームラインは図 4.1 の RFBT 部に概ね一致し、TLEX 部はシミュレーションの概念図である。RFBT 部を通過したビームを TLEX 部に入射することを考える。

本研究では図 4.1 のビームラインの設計でシミュレーションを行いビームの品質を評価する。

シミュレーションは、空間電荷追跡アルゴリズム ASTRA および ELEGANT を用いて行った。ASTRA は、初期粒子を生成する generator、外部の磁場や電場の影響を読み取って粒子を追跡する ASTRA、電磁界を表示する fieldplot、粒子の位相空間プロットを表示する postpro、ビームサイズ・エミッタンス等を表示する lineplot から構成される。ELEGANT は各パラメータを設定した条件下で最適化することによって理想的なビーム状態や軌道を追跡できるトラッキングコードである。ELEGANT で計算したパラメータの設定を ASTRA で読み込んでシミュレーションを行う【9】【10】。

## 4.2 xy エミッタンス交換の確認

RFBT のシミュレーションには STF の RFBT 研究の先行研究者である荒本氏のビームライン設計に従った。シミュレーションに用いたパラメータを以下に示す。

Parameter	Value	units
number of particles	10000	個
total charge	-6.0E-02	nC
magnetic field on cathode $B_c$	1300	Gauss
rms beam size on cathode $\sigma_x$	1.20	mm
rms beam size on cathode $\sigma_y$	1.20	mm
rms beam size on cathode $\sigma_z$	1.11	mm
Rf gun phase	25	deg
RF gun peak gradient	-40	MV/m
RF gun frequency	1.3	GHz
Q(1)position	8.398	m
Q(1)focusing strength	0.989	$m^{-2}$
Q(2)position	8.698	m
Q(2)focusing strength	-1.766	$m^{-2}$
Q(3)position	9.533	m
Q(3)focusing strength	0.333	$m^{-2}$
Q(4)position	13.265	m
Q(4)focusing strength	-0.5102	$m^{-2}$
Q(5)position	14.05	m
Q(5)focusing strength	-0.510	$m^{-2}$

Q(6)position	41.640	m
Q(6)focusing strength	0.263	$m^{-2}$
Q(7)position	42.84	m
Q(7)focusing strength	-0.2632	$m^{-2}$
SkQ(1)position	43.5	m
SkQ(1)focusing strength	2.691	$m^{-2}$
SkQ(2)position	46.5	m
SkQ(2)focusing strength	-3.962	$m^{-2}$
SkQ(3)position	51.845	m
SkQ(3)focusing strength	-4.482	$m^{-2}$

表 4.1 RFBT parameter

RF gun、Cavity の RF 位相は ASTRA の Auto phase 機能によって設定されており、cavity の位相は空洞内でエネルギーを最大化するようにビーム中心が最大加速度位相に乗るように調整される。skewQ 下流でのビームマトリックスの非対角成分 0 に近づくように ELEGANT で最適化をする。

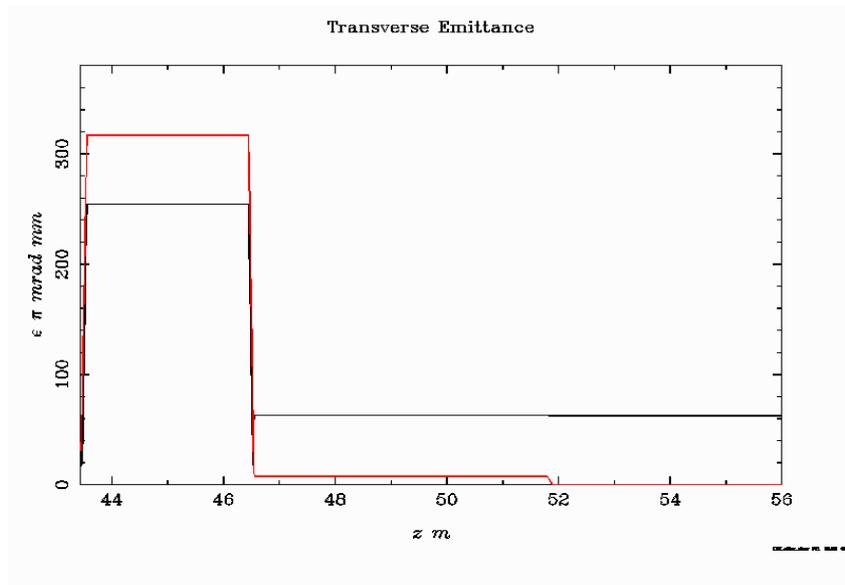
表 4.1 のパラメータを用いてシミュレーションを行った結果、以下のようなシミュレーション結果が得られた。

	$\epsilon_x (\mu\text{m})$	$\epsilon_y (\mu\text{m})$	$\epsilon_y/\epsilon_x$	$\epsilon_x\epsilon_y$
cathode	1.016	1.016	1.000	1.032
skewQ 通過後	62.57	0.1205	519.3	7.539

表 4.2 RFBT 結果

これから、cathode で生成されたエミッタンスは x、y について対称であるが、skewQ 通過後には x 方向のエミッタンスが y 方向のエミッタンスに比べて過大になっていることが分かることから RFBT が確認できた。

また、横方向エミッタンスの積については thin lens 近似の場合完全に保存されるが、シミュレーションでは実際の加速器設計に基づいて行ったためエミッタンス増大が見られる。



グラフ 4.1 skew quad 後の横方向エミッタンス

グラフ 4.1 は skew quad を過ぎた時の横方向エミッタンスのプロットである。赤線が y 方向、黒線が x 方向のエミッタンスになっていて交換していることと、y 方向のエミッタンスが極小となっていることが視覚的にも分かる。

したがってこのビームを TLEX により x-z で位相空間回転をおこして、x 方向の過大なエミッタンスを z 方向に逃がすことを考える。

### 4.3 RFBT と TLEX の接続

前節で得られた RFBT 通過後のビームを TLEX に接続することを考える。TLEX の先行研究【8】では、bending magnet および dipole mode cavity の転送行列を ELEGANT を用いて直接入力することで thin lens 近似と thick lens 近似によってエミッタンス交換を確認している。本研究では EEX の設計を ASTRA で行うことで、より現実的なビームライン設計を想定した。以下、EEX のパラメータ合わせについて解説する。

bending magnet のパラメータは【5】で用いられる設計に従った。

Parameter	Value	Unit
$S_1$	1	m
$S_2$	0.3	m
$\theta$	20	deg
D	0.2	m

表 4.3  $S_1$  は bending magnet 間のドリフト距離、 $S_2$  は bending magnet と cavity 間のドリフト距離、 $\theta$  は曲げ角、D は bending magnet の幅を表す

上のパラメータを(3-73)式に代入して計算すると  $\eta = -0.4624\text{m}$  となる。この値と対角成分を除去するための整合条件(3-81)式から  $k = 2.1626$  と求まる。

次に bending magnet の磁束密度  $B_m$  を求める。電子が磁場を受けながら運動するときローレンツ力を受けて軌道が曲がる。この時、磁束密度  $B_m$  (T) と粒子の運動量  $P$  (MeV/c)、曲率半径  $\rho$  (m) との間に

$$P = 300B\rho \quad (4-1)$$

が成り立つ【12】P.28。ここで曲率半径は下図のように表される。

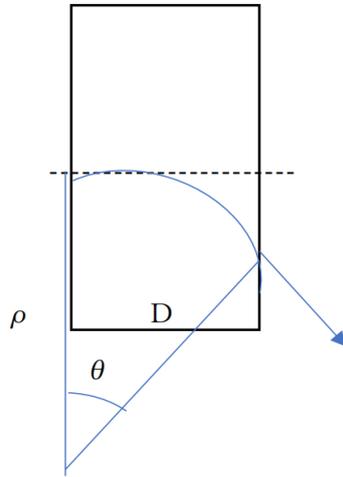
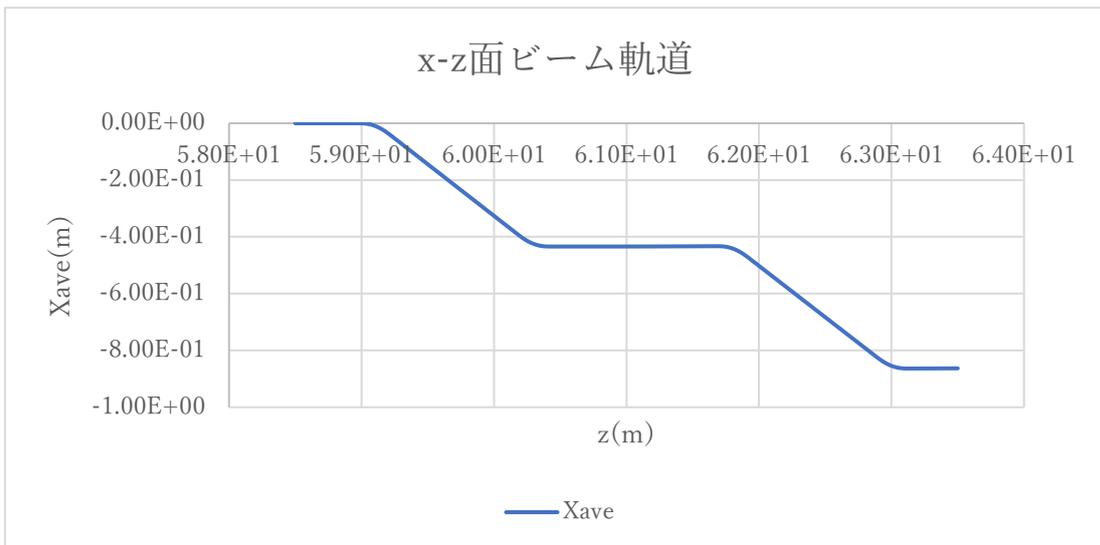


図 4.2 bending magnet の曲率半径  $\rho$

上図から、

$$\rho \sin(\theta) = D \quad (4-2)$$

が成り立ち、 $\rho = 0.5847$  となるので、(4-1)式から  $B_m = 2.0394(\text{T})$  と求まる。この磁束密度で設計した dogleg にビームを通した時ビーム軌道は下の図のようになる。



グラフ 4.1 x-z 面ビーム軌道 縦軸はビームバンチの平均 x 座標。bending magnet はそれぞれ 59m、60.2m、61.7m、62.9m に配置している。

次に dipole mode cavity のパラメータを合わせる。(3-77)式の転送行列をビームに作用させると  $x, z$  面に関して

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \\ z_2 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ z_1 \\ z'_1 \end{pmatrix} \quad (4-3)$$

$x'_2$  について見ると  $x'_2 = x'_1 + kz_1$  と表せる。ここで  $z$  はバンチ中心からの  $s$  軸方向のズレなので、 $kz_1$  はバンチ中心から  $z$  だけズレた電子が曲げられるときの曲げ角に相当する。

図 4.2 と同様にして(4-2)から

$$\rho \sin(\theta) = L_c \quad (4-4)$$

となる。 $L_c$  は cavity の幅である。ここで  $\theta \ll 1$  とすると  $\sin(\theta) = \theta$  と近似でき、曲げ角  $\theta$  は

$$\theta = \frac{300L_c}{P} B_c \quad (4-5)$$

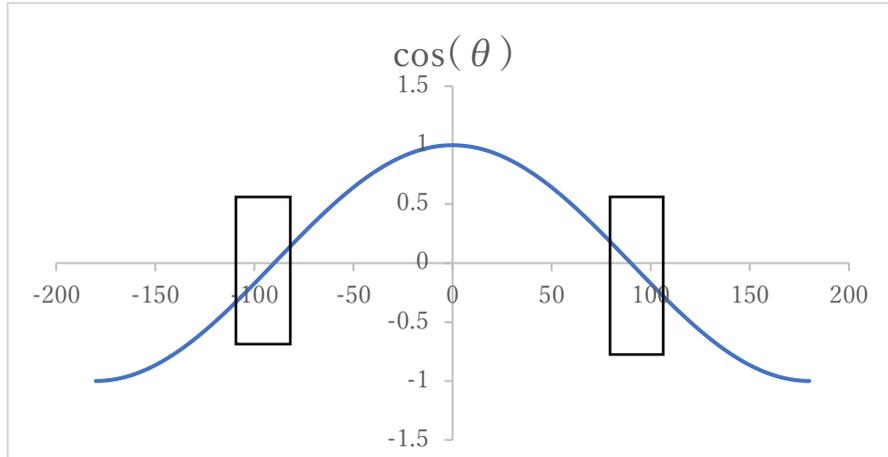
と書ける。ASTRA では cavity の電磁場成分が 3D マップで与えられており、 $y$  方向の磁束密度の振幅、および定在波の位相を調整することで各成分がその値に合わせてスケールされる。前述のように  $kz_1$  はバンチ中心から  $z$  だけズレた電子が曲げられるときの曲げ角に相当することからバンチ中心をクレスト位相に合わせることでその動きを再現できる。ASTRA で与えられる  $y$  方向の磁束密度は

$$B_y = \frac{E_0}{c} \cos(wt) \quad (4-6)$$

である【11】。また、(4-5)式に登場する  $B_c$  は  $B_y$  を cavity 内での座標系でみた  $z$  について積分した値であるので

$$B_c = \int B_y dz \quad (4-7)$$

と書ける。バンチ中心をクレスト位相に合わせることを考えると下図のような  $\cos$  関数のとき四角に囲まれた範囲で積分しなければならない。



グラフ 4.2 積分すべき範囲

ここでバンチ中心からのズレ  $z$  は光速  $c$  とローレンツ  $\beta$  を用いて

$$z = \beta ct \quad (4-8)$$

で表されるので、 $\omega t = 0$  になる点にバンチ中心を置くと

$$z = \beta c \left( t \pm \frac{\pi}{2\omega} \right) \quad (4-9)$$

と書け、式変形すると

$$\omega t = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{\beta c} z \quad (4-10)$$

である。これを用いて(4-6)式を変形すると

$$B_y = \frac{E_0}{c} \cos \left( \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{\beta c} z \right) \quad (4-11)$$

であり、これを  $z=0$  でテーラー展開すると

$$B_y = \mp \frac{\omega E_0}{\beta c^2} z \quad (4-12)$$

となる。これを  $-\frac{L_c}{2} + z \sim \frac{L_c}{2} + z$  で定積分する。

$$\begin{aligned} B_c &= \int_{-\frac{L_c}{2}+z}^{\frac{L_c}{2}+z} \mp \frac{\omega E_0}{\beta c^2} z dz \\ &= \mp \frac{\omega E_0}{\beta c^2} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{-\frac{L_c}{2}+z}^{\frac{L_c}{2}+z} \\ &= \mp \frac{\omega L_c E_0}{\beta c^2} z \end{aligned} \quad (4-13)$$

と書けるので、確かにバンチ中心なら  $z=0$  で  $B_c=0$  となることが分かる。ここで(4-5)式と  $kz$  は曲げ角に相当することから

$$kz = \frac{300 L_c}{P} B \quad (4-14)$$

とかけ、(4-13)式と(4-14)式を照らし合わせると

$$k = \mp \left( \frac{300\omega L_c^2}{P\beta c} \right) \frac{E_0}{c} \quad (4-15)$$

となる。ここで $\frac{E_0}{c}$ は $B_y$ の最大振幅なので $B_{y0} = \frac{E_0}{c}$ と定義すると

$$B_{y0} = \mp \left( \frac{P\beta c}{300\omega L_c^2} \right) k \quad (4-16)$$

である。シミュレーションでは(4-16)式に以下の値を用いた。

	value	Unit
P	357.8	MV/c
$L_c$	0.7040	m
$\omega$	$1.895 \times E09$	Hz
$\beta$	1.0	
c	$2.998 \times E08$	m/s
k	2.1626	

表 4.4 パラメータ合わせで用いた値。k は bending magnet で求めた値

表 4.4 の値を(4-16)式に代入して計算すると

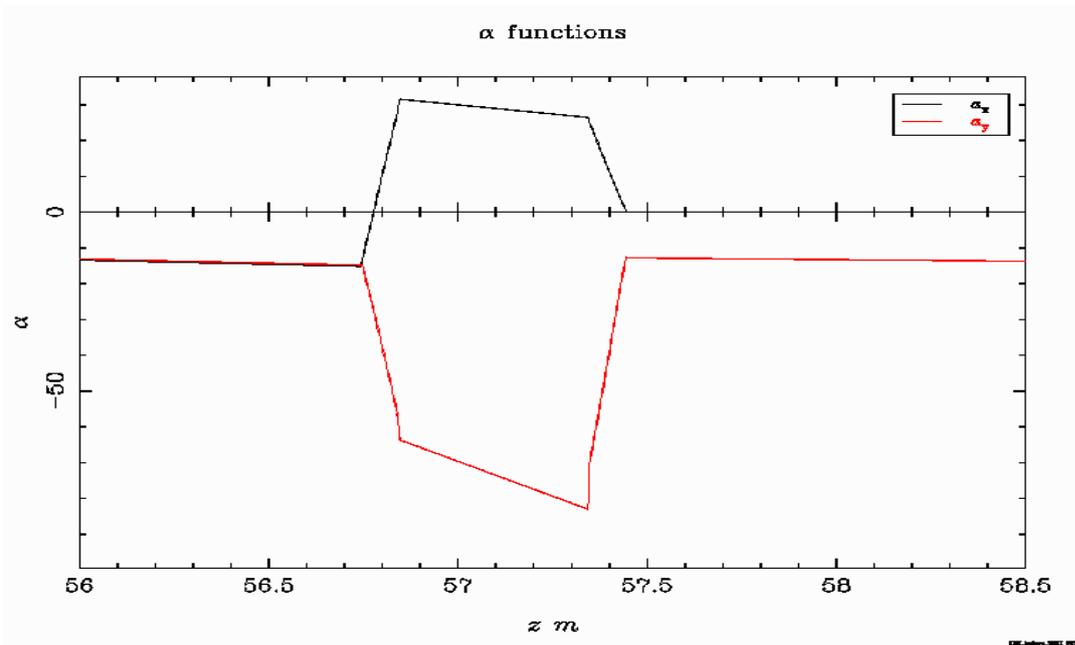
$$B_{y0} = \mp 8.233 \times 10^{-2} \text{ (T)} \quad (4-17)$$

と求まるので、この値に近づくように 3D マップをスケールした。また、(3-99)式でエミッタンス増大を抑制するために $\alpha_x = 0$ の条件を付けることを考える。このために EEX の前に quadrupole を 2 つ設け、elegant によって focusing strength の最適化を行った。この時の quadrupole の focusing strength は次のようになる。

$$Q(13) = 5.662 \quad \text{T/m}$$

$$Q(16) = -4.672 \quad \text{T/m} \quad (4-18)$$

下のグラフは EEX 入り口付近での $\alpha_x$ (黒線)、 $\alpha_y$ (赤線)を表す。



グラフ 4.3 EEX 進入前の $\alpha_x$ (黒線)および $\alpha_y$ (赤線)

グラフより $\alpha_x \cong 0$ であり最適化が行われていることが確認できる。

以下にシミュレーション結果を示す。

	$\varepsilon_x (\mu\text{m})$	$\varepsilon_y (\mu\text{m})$	$\varepsilon_z (\mu\text{m})$
EEX 通過前	62.56	0.1205	79.65
EEX 通過後	6174	0.1692	98.34

表 4.5  $\alpha_x$ の調整の有無でのシミュレーション結果

ここで【8】に倣ってエミッタンス増大率を次のように定義する。

$$R = \frac{\varepsilon_{x1}\varepsilon_{z1}}{\varepsilon_{x0}\varepsilon_{z0}} \quad R_x = \frac{\varepsilon_{x1}}{\varepsilon_{z0}} \quad R_z = \frac{\varepsilon_{z1}}{\varepsilon_{x0}} \quad (4-19)$$

この時、それぞれの値は

$$R = 121.84 \quad R_x = 77.51 \quad R_z = 1.57 \quad (4-20)$$

となり、大きくエミッタンス増大が起きている。完全なエミッタンス交換が行われている場合は $R=1$ になるはずである。

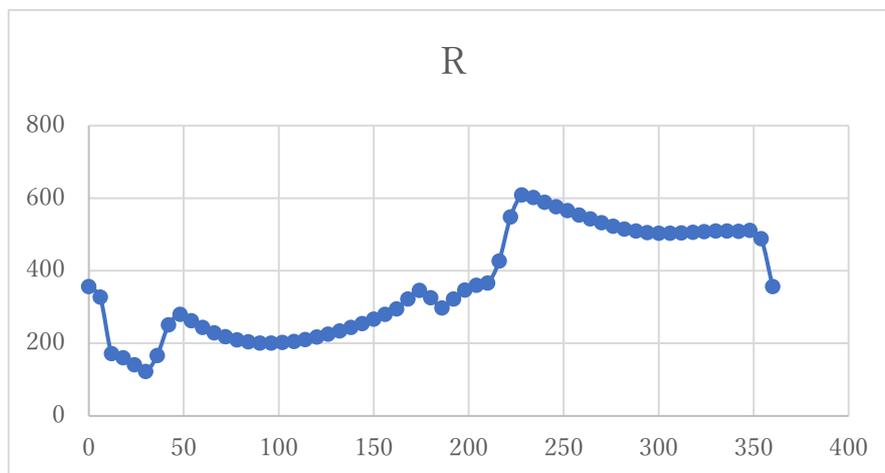
#### 4.4 理論との比較と考察

以下に交換がうまくいかなかった原因を考察する。

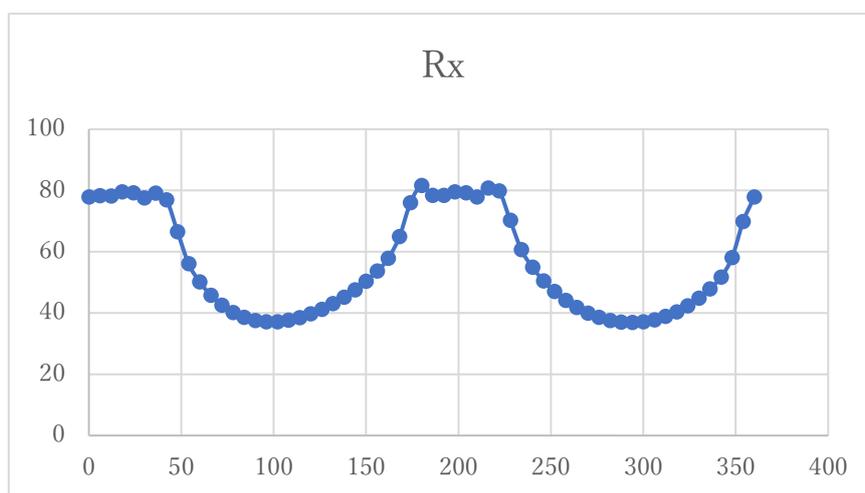
1つ1つのパラメータについてみたときにグラフ 4.1 から分かるように bending magnet は設定通りに機能しておりビーム軌道が線形的で、dogleg 通過後も cavity に進入する前にも s 軸方向に平行である。従って cavity のパラメータが合っていないことが原因の一つとして考えられる。

そこで初期位相を 1 周期分変化させてエミッタンス増大率について調べた。

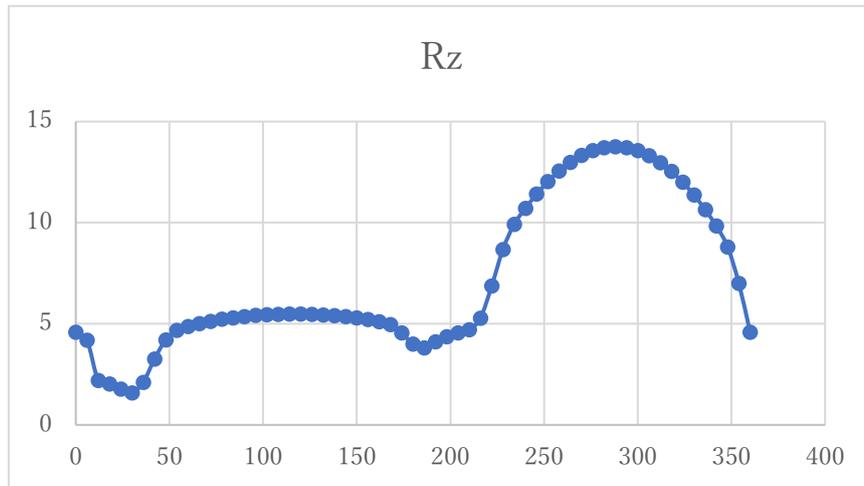
各点は位相を 6 度ごとに变化させたときの R である。



グラフ 4.4 R の変化



グラフ 4.5 Rx の変化



グラフ 4.6 Rz の変化

増大率 R は Rx と Rz の積なので一定値になるはずであるが Rx と Rz の形から一定にならないことが分かる。したがって 3D マップで与えられている式と今回計算した式とで位相と振幅のパラメータが合っておらずその結果エミッタンス増大が起きていることが一つ考えられる。

次に考えられるのがエミッタンス増大因子の抑制ができていないことである。

(3-99)式から、エミッタンス増大を引き起こす要因は $\alpha_x$ と $(\xi\alpha_{z0} - 2\beta_{z0})$ の値であると考えられる。今回は $\alpha_x=0$  の最適化のみで設計したため $(\xi\alpha_{z0} - 2\beta_{z0})$ の影響が考慮できていない。これらのことからエミッタンス増大が生じていると推測できる。

## 5. まとめ

本研究では STF ビームラインの設計で高ルミノシティビーム生成することを目的として RFBT および TLEX をシミュレーションによって試みた。Astra では空間電荷効果などの非線形効果も含まれる他、RFBT 部分は実際の STF ビームライン設計に沿って設計されているため単純な RFBT モデルに比べてエミッタンス増大は生じるが、横方向に大きく非対称なエミッタンスを確認することができた。しかし今回設計した EEX ではパラメータ合わせが完全には出来ておらず大きなエミッタンス増大が起きた。また、EEX に進入する直前のビームに対してエミッタンス増大を抑制する最適化が十分ではない。今後の課題としては cavity の振幅および位相をどのようにして合わせるかという点と入射直前のビームの最適化方法であるが、前者に関しての一つの解決策はパラメータを少しずつ変えていき相応しい値に漸近させていくことが考えられる。後者に関しては elegant で適切な処理を行うことを検討する。

謝辞

本論文の執筆にあたり担当教員の栗木先生をはじめ、研究室の方々には大変お世話になりました。とくに栗木先生には最後まで丁寧に指導していただき論文を執筆することができました。また、荒本先輩にも何度も手伝っていただきプログラミングをはしらせることができました。本研究室に携わって頂いたすべての方々に感謝申し上げます。

## 6. 参考文献

【1】 Graduate school of Advanced Sciences of Matter, Hiroshima University Accelerator Physics Foundation of Electron Accelerator Author: Masao KURIKI

【2】 THE UNIVERSITY OF CHICAGO ANGULAR-MOMENTUM-DOMINATED ELECTRON BEAMS AND FLAT-BEAM GENERATION A DISSERTATION SUBMITTED TO THE FACULTY OF THE DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES IN CANDIDACY FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY DEPARTMENT OF PHYSICS BY YIN-E SUN CHICAGO, ILLINOIS JUNE 2005

【3】 K.-J. Kim, "Round-to-flat transformation of angular-momentum-dominated beams," Phys. Rev. ST Accel. Beams 6, 104002 (2003).

【4】 Transverse-to-longitudinal emittance exchange to improve performance of high-gain free-electron lasers P. Emma and Z. Huang Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, California 94309, USA K.-J. Kim Argonne National Laboratory, Argonne, Illinois 60439, USA

P. Piot Northern Illinois University, DeKalb, Illinois 60115, USA and Fermi National Accelerator Laboratory, Batavia, Illinois 60510, USA (Received 1 August 2006; published 25 October 2006)

【5】 Transverse to longitudinal emittance exchange M. Cornacchia\* and P. Emma † Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, Stanford, California 94309 (Received 13 June 2002; published 29 August 2002)

【6】 Using an emittance exchanger as a bunch compressor Bruce E. Carlsten, Kip A. Bishofberger, Steven J. Russell, and Nikolai A. Yampolsky Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico 87545, USA (Received 21 February 2011; published 29 August 2011)

【7】 Emittance Partitioning by Phase-space Rotation and Its Applications Masao KURIKI\*

【8】 位相空間回転によるリニアコライダーのための高ルミノシティビーム生成—x-z エミッタ  
ンス交換の特性評価— 広島大学理学部物理科学科 西村武

【9】 A Space Charge Tracking Algorithm Version 3.2 March 2017 Author: Klaus Floettmann  
DESY Notkestr.85 22603 Hamburg Germany [Klaus.Floettmann@DESY.De](mailto:Klaus.Floettmann@DESY.De)

【10】 User's Manual for elegant Program Version 15.1.1 Advanced Photon Source Michael  
Borland April 21, 2004

【11】 10.37 FTRFMODE—One or more beam-driven TM dipole modes of an RF cavity, with  
data from a file.