Graduate school of Advanced Sciences of Matter,

Hiroshima University

Accelerator Physics

Foundation of Electron Accelerator

Author:
Masao KURIKI

2021年4月12日

目次

第 1 章　現代物理における加速器の役割 5

1.1 加速器の歴史 . . . 6
1.2 加速器の種類 . . . 7
1.3 Collider . . . 9
1.4 現代の加速器 . . . 10

第 2 章　加速の基本条件 15

2.1 相対論の基礎関係式 . . . 15
2.2 電磁場中での粒子の運動と加速 . . . 16

第 3 章　ビーム力学の基礎 23

3.1 粒子の軌道の表現と行列表示 . . . 23
3.2 位相空間の輸送 . . . 27
3.3 縦方向位相空間の輸送とバンチング . . . 30
3.4 Spin manipulation . . . 32

第 4 章　加速空洞 37

4.1 Pill-box 型空洞 . . . 37
4.2 定在波型加速空洞 . . . 42
4.3 進行波加速管 . . . 46

第 5 章　ビーム計測 51

5.1 ビームエミッタンスの測定 . . . 51

第 6 章　電子の放射現象 53

6.1 放射の基礎過程 . . . 54
6.2 Wiggler と Undulator . . . 55
6.3 Quantum excitation . . . 56
6.4 Radiation Damping . . . 57
6.5 平衡状態 . . . 59

第 7 章　コライダーのビーム物理 61

第 8 章　電子放出の素過程と陰極 67

8.1 熱電子放出 . . . 67
8.2 Schottky 効果と電界電子放出 . . . 72

8.3 光電子放出 74
8.4 直接遷移型半導体からの光電放出 77
8.5 二次電子放出 87
8.6 Laser 87

第 9 章 電子の集団運動と電子銃 93
9.1 空間電荷制限電流 93
9.2 空間電荷効果とユニバーサル関数 95
9.3 線形空間電荷効果 96
9.4 Pierce 型熱電子銃 99
9.5 RF 電子銃 100
9.6 ILC 入射器 101

第 10 章 陽電子発生 107
10.1 陽電子捕獲 108
10.2 陽電子源のコンセプト 112
10.3 おわりに 128
.1 WKB 近似 129

参考文献 131

第 1 章

現代物理における加速器の役割

世界は多くの階層構造から成り立っている．銀河や太陽系、惑星、地形などの目に見えるマクロな構造から、物質、化合物、元素、原子、原子核や電子などのミクロな構造まで、いたるところに階層構造が見られる．図 1.1 は Ouroboros の蛇と呼ばれるもので、物質の階層構造と、それが究極的には統一されることを象徴したものである．1m くらいの大きさの階層（つまり人間のスケール）から出発し、大きなスケールの方向には天文学や宇宙論が、小さい方向には原子核物理や素粒子物理が発展してきた．

科学史的にみると、このような統一的な科学観というものは、16 世紀の科学革命以降に確立した考えであるといえる。アリストテレスやプトレマイオスの世界観に如実にそれを見ることできるが、中世以前の世界においては、地上と天上は別の法則に支配された別の世界であった。天上は調和し、円運動に支配された世界であり、恒星や惑星は規則的に動きつづける。地上は非調和的であり、直線的であり、物体は地上に落下する。

それを打ち破ったのはデカルトであり、そしてニュートンであった。彼らは、天上と地上が別の法則ではなく、統一的な法則により支配されているべきだと考えた。これは革命というに相応しい発想の転換であり、ある種の統一論である。電気と磁気が、電磁気として統一され、弱い相互作用と電磁相互作用が、電弱相互作用として統一されたような、統一論である。デカルトとニュートンの勇断により、今まで別のものであった現象を統一的に理解するという「旨味」を人類は知ったのである。それは、すなわち科学である。

以降の科学の進歩は、別だと思われてたスケールの現象を統一的に理解し、科学という体系の「領地」を広げてきた。また、いままで未知だった階層構造を探り、それを体系の中に取り込んできたのである。新たな階層構造を発見し、それを体系化すること、が科学の進歩であるということもできる．

図 1.1 のお腹あたりから出発した科学は、大きなスケールの方向、そして小さなスケールの方向に領地を増やし、いまや蛇の頭と尻尾は近づいてきているように見える。しかし、2018 年時点ではまだ頭と尻尾は繋がっていない．科学は未だに発展し続ける、未完の体系である。

19 世紀の初頭には元素として認められていた物質はおよそ 30 であった．1870 年にロシアの Dormitry Mendeleev は当時発見されていた 63 個の元素に、「適切な未発見の元素」を加えて原子量の順番に並べることで性質のよく似た元素が周期的に現れることをしめした．この周期表は化学という体系の下地を作るとともに、その下により基本的な階層構造があることを強く示唆していた．20 世紀の爆発的な物理の発展は、元素より下の多くの階層構造の発見であるが、その下地を作ったのが 19 世紀の化学の発展である．

周期表から元素の構成要素 (=原子）に下部構造があることが強く示唆されたが、それを調べることは容易ではなかった．事実、19 世紀末まで、原子は物質の最小構成単位であり、これ以上分割できないと信じられていた．Joseph J. Thomson は熱した金属に負の電圧をかけると、物質内部から負の電荷を帯びた粒がでてくることを発見した．これが電子の発見である．通常は安定な金属原子を高温にすると、電子は熱エネルギーにより原子核ポテンシャルから逃げだすことができる．このように外部からエネルギーを与えることで、その構成粒子を初めて観測することができたのである．

原子核は Ernest Rutherford により発見された．Rutherford はすでに発見されていた放射性同位体から発生するア

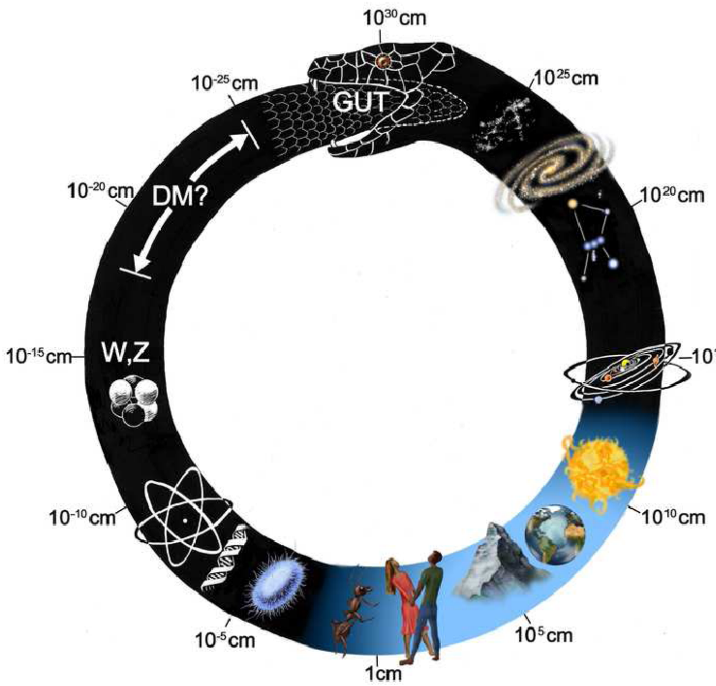


図 1.1　Ouroboros の蛇．古代より再生や無限など様々な象徴とされている．物理においては階層構造と、その統一的理解を象徴するが、これを物理にあてはめたのは Glashow であるとされる [1].

ルファ線を金泊に照射したところ、稀に大角度で散乱されるアルファ線があることを発見した．これは、物質は空間的にはほとんど空虚であり、質量はごく小さな粒 (原子核) に集まっている、ということを意味していた．この反応は現在では Rutherford 散乱として知られている．原子核の発見では、Rutherford は原子核を直接観測したわけではない．観測したのは散乱されたアルファ線であり、アルファ線は原子内部の構造を調べるための探針の役割を果たしたのである．

以上の二つの例が示していることは、あらたな階層構造、とくにより微細で安定な構造をしらべるためには、安定な構造を破壊するようなエネルギーを外部から与えるか、微小な探針で内部を探る必要があるということだ．より高いエネルギーを与えればより細かい単位にまで分解され、観測可能だろう．また、探針の細さは、量子論によればエネルギーに逆比例するため、より細い探針のためにはやはり高いエネルギーが必要となる．

加速器とは、主に荷電粒子のエネルギーを人工的に増大させるための実験装置である。より高いエネルギーの粒子により、より微細で詳しい構造、今まで生じなかった未知の現象が生じるわけであるから、物質のより基本的な構成要素をさぐる原子核、素粒子物理学においては、粒子加速器は必要欠くべからざる装置となった．1960 年代における大発見時代を経て、1990 年代にかけての素粒子の標準模型の確立に、粒子加速器は大きな役割を果たしてきた．以

下、本論では歴史的な経緯に適宜触れながら、粒子加速器の基礎の理解を目的に記述をすすめていく.

1.1 加速器の歴史

最初に発明された加速器は静電型加速器である．何らかの方法で高い電圧を発生させ, その間に粒子を走らせると、粒子のエネルギーは電場により加速され増大する．この場合、電場は時間的に一定であるので、加速量（エネルギー）ε は

$$\varepsilon = qEL = qV, \tag{1.1}$$

となる．ここで q は粒子の電荷, E は電場の大きさ, L は長さ, V は電位差である．このような静電型の加速器の例として Van-de-Graaf 型や Cockcroft-Walton 型などがある．原理的には高いエネルギーが欲しければ高い電圧をかければいいが、現実には放電による絶縁破壊が発生してある程度以上は電圧をかけることが困難である．そのためこのタイプの加速器は比較的低エネルギー領域で用いられることが多い．また、高エネルギー加速器の初段加速にも用いられる．静電型加速器の典型的な加速エネルギーは 1MeV 程度であり、大型の静電加速器でも 10-20MeV を越えることは難しい.

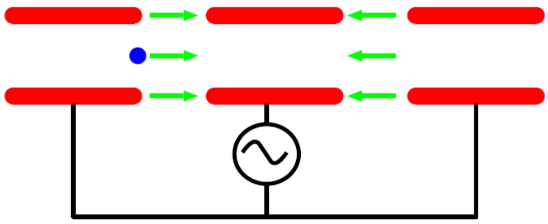


図 1.2 Widerøe が行った共鳴加速の模式図．中央の導体には時間変化する電位を与え、粒子が通過することで加える電圧の二倍加速される.

静電加速器の限界を越えて高いエネルギーまで粒子が加速できるようになったのは共鳴加速（高周波加速）の発明のおかげである．高周波加速とは時間的に変化する電場による加速のことで、現代のほぼすべての高エネルギー加速器はこの方法を採用している．RF 加速方式を最初に提案したのは Rolf Widerøe である．彼の提案した RF 加速とは図 1.2 に示すようなものである．粒子は一つ目のギャップを通過する時に加速され、粒子がパイプの中を通過する間に電位が逆転しているようにタイミングをうまくあわせると、二つめのギャップでも同様に加速される．これだけなら単に二倍の電圧であるが、このように時間的に変化する電磁場を用いることで、繰り返し加速が可能となり、原理的に加速エネルギーの上限が無くなった．同様な電極をたくさんならべれば、それだけ粒子のエネルギーを高くすることができる．これは現代でいう線形加速器のコンセプトに相当する．また、一つの電極で粒子を加速し、加速された粒子を図のようにふたたび電極を通過するような閉軌道をつくるように導き、繰り返し加速する方式も考えられる．これはサイクロトロンやシンクロトロンなどの円形加速器のコンセプトに相当する．このように RF 加速の発明というのは現代加速器の基礎となる概念であり、非常に意義深いものである．RF 加速の発明が無ければ、加速エネルギーはせいぜい数 10MeV 程度に留まっていたに違いない． ヒッグス粒子はおろか、すべてのクォーク、弱ボゾンは未発見だろう.

1.2 加速器の種類

加速器の歴史は 19 世紀末の陰極管による陰極線 (電子ビーム）や X 線の発生まで遡ることもできるが、本格的な加速器の登場は 1930 年の R. J. Van de Graaf によるベルト式高電圧発生装置によるイオン加速、それに続く 1932 年の John D. Cockcroft と Ernest. T. S. Walton による陽子加速器であろう．Van de Graaf 型は高圧電極との間

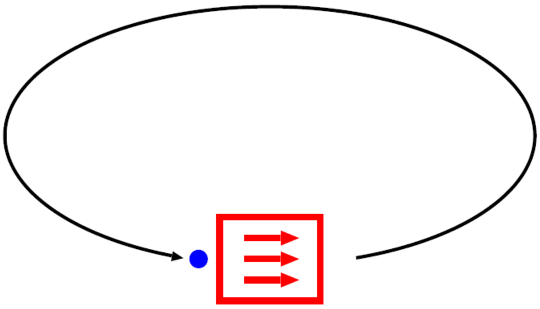


図 1.3　円形加速器による共鳴加速の図．粒子は同じ電極で繰り返し加速される．

を回転する絶縁物でできたベルトにコロナ放電により電荷を与え、電極を充電することで高電圧を得る．最終的に 9MV の発生に成功した．このタイプの加速器は荷電変換により二倍の電圧を得るタンデム型、ベルトに代わりペレットチェーンという絶縁物を利用したペレトロンなどに発展し、イオン加速器として現在でも使用されている．一方、Cockcroft-Walton 型加速器は共振充電を用いた静電型の加速器で、700kV の高電圧を発生し、その電圧により陽子ビームを生成した．現在では 1MV 以下の産業用の加速器として、材料改質や滅菌処理などに幅広く利用されている．また、高エネルギー加速器の初段加速にも広く利用されている．

静電型の加速器が放電限界から加速エネルギーに上限があるのに比べ、RF 加速には限界がない．RF 加速を採用した原始的な加速器は 1928 年に Widerøe により発明され、Ernest O. Laurence と David H. Sloan はこの電極を 30 個並べてイオンを 1. 26MeV まで加速することに成功した．

1931 年に Laurence は M. S. Livingston ともに最初の Cyclotron を製作し加速に成功した．これは RF 加速による初の円形加速器である．後述するように Cyclotron での加速には原理的限界があり、それを突破するために発明されたのが Synchrotron である．1947 年には GE 社により初の 70MeV 電子 Synchrotron がその加速に成功した．この Synchrotron によりシンクロトロン放射が初めて観測されている．現在ではシンクロトロン光は高性能光源として幅広く利用されている．

現在活躍している高エネルギー加速器は、そのほとんどすべてがシンクロトロン、線形加速器、そしてその組み合わせである．以下、それらについて基礎的な説明を試みる．

1.2.1 Synchrotron

Synchrotron とは円形の加速器であり、円形軌道を維持する二重極電磁石、真空パイプ、加速のための加速空洞、ビームの入射や取り出しのために特殊な磁石等からなる．説明の都合上、Synchrotron の一世代前の円形加速器である Cyclortron から説明する．

Cyclotron では粒子は円形軌道を描きながら加速されるが、その磁場は一定である．磁場が一定の場合、よく知られているように粒子の軌道半径は

$$\rho = \frac{cp}{eB}, \tag{1.2}$$

と与えられる．この時、軌道を周回するのに要する時間、すなわち周期 T は

$$T = \frac{2\pi\gamma mc}{eB}, \tag{1.3}$$

となる．すなわち $\gamma \sim 1$ の低エネルギー領域では周期が一定となる．図 1.4 は Cyclotron の概念図を表している．磁場により周回運動をする粒子が、電極間を通過するたびに加速される．電極にかける交流電圧の周期は式 1.3 に合わせておけば粒子は常に加速されつづける．一回の加速量が少なくても、多数回周回させることで高いエネルギーが得られる．しかし同期条件は $\gamma > 1$ となると崩れてしまうので、あるエネルギーを限界として、それ以上はうまく加速

できない．この同期条件を高いエネルギーでも維持できるように周波数を変調するシンクロサイクロトロン等が発明

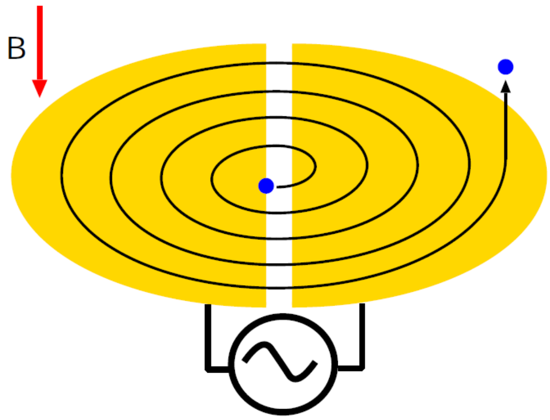


図 1.4　サイクロトロンの概念図．電極間には交流の電圧がかけられており、電極間を通過するたびに加速される．

されたが、いずれにしろ高いエネルギーを得るためには巨大な電磁石が必要となり、実現は難しい．その欠点を克服し、原理的に加速エネルギーの限界のない円形加速器として発明されたのがシンクロトロンである．図 1.5 にその概念図を示す．粒子は二重極磁石によって決められた基準軌道上を周回する．粒子は加速空洞を通過するたびに加速さ

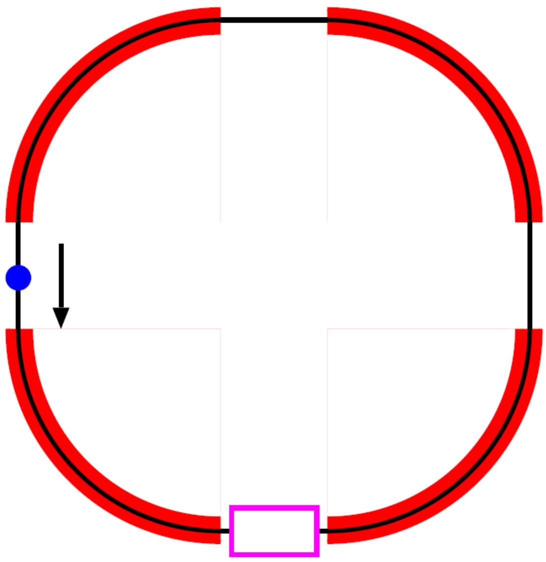


図 1.5　シンクロトロンの概念図．二重極磁石によって決められた軌道上を粒子は周回し、設置された加速空洞により繰り返し加速される．

れる．粒子の軌道を一定に保つため、エネルギーの増大にあわせて磁場 $B(t)$ を時間の関数として強くしていく．また、加速空洞の周波数 $f_{RF}(t)$ もエネルギーにあわせて変調する必要がある．軌道を真円とした場合、その条件は以下のようになる．

$$B(t) = \frac{\gamma\beta mc^2}{eR}, \tag{1.4}$$

$$f_{RF}(t) = \frac{n\beta c}{2\pi R}, \tag{1.5}$$

ここで n はある整数、R は軌道半径である．これらの式から、磁場は $\gamma\beta$ に比例して強くしなくてはならない．一定

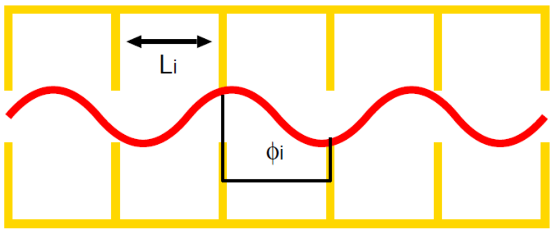


図 1.6　Linac の概念図．空洞内に加速電場を生成し、粒子を加速する．

の半径を仮定した場合、発生できる磁束密度の大きさがエネルギーの上限を与える．他方、周波数は β に比例するため、高いエネルギー領域ではある値に漸近することがわかる．質量の軽い電子では加速のごく初期の段階で β は 1 に極めて近い値となるので、電子をシンクロトロン加速する際は周波数は一定でよいことがわかる．

1.2.2　Linac

線形加速器とは、Widerøe に始まる RF 加速の概念を技術的に成熟させたもので、加速空洞を直線状に並べたものである．Alvarez linac, RFQ linac, Disk-loaded など金属空洞によりに適当な境界条件を与え、その内部の空間に大パワーの RF(Radio Frequency, 高周波）を閉じ込めて加速電場をつくる．加速されるビームの種類、エネルギー、要求される加速器の性能などにより様々なコンセプトの線形加速器が提案され使用されているが、基本的な仕組みは同じである．

線形加速器において、粒子は同じ加速空洞を一回しか通過しないので、円形加速器にくらべて同等な加速を行うためには加速電場を高くする必要がある．一方、粒子との同期条件にあわせて空洞を設計することができるなど、柔軟性が特長である．また、線形加速器では粒子軌道が直線なので、原理的に強いシンクロトロン放射は発生せず、後述する円形加速器におけるシンクロトロン放射による加速限界という制限を受けない・

Linac の加速空洞内部の電磁場はその形状により様々であるが、一般的に図 1.6 に示すようなセル構造をとる．一つセルの長さを L_i、隣り合ったセル間の RF の位相差を ϕ_i としよう．簡単のため電場と粒子の進行方向は平行としてすると各セルによる加速 dE_i は

$$dE_i = eV_0 cos\left(\sum \phi_i - \frac{\omega \sum L_i}{\beta c}\right), \tag{1.6}$$

と与えられる．ω は RF の角周波数、βc は粒子の速度であり、加速により変化する量である．各セルで同期をとりながら粒子を加速するには

$$\phi_i - \omega \frac{L_i}{\beta c} = 0, \tag{1.7}$$

である必要がある．この条件はセル間の位相差と、粒子がセルを移動するのにかかる時間の間の位相変化量が等しいということを表している．式 1.7 は

$$L = \frac{\phi_i}{\omega} \beta c, \tag{1.8}$$

と書き換えられる．すなわち一定の周波数と位相進みを仮定すると、粒子の速度に比例してセル長を調整する必要がある．すなわち低エネルギー部分のセル長は短く、高エネルギーになるに従いセル長を伸ばしていく．超相対論的な領域では粒子の速度は $\beta c \sim c$ と近似できるからセル長は一定でよい．

実際の線形加速器では、上記の加速空洞に加え、ビーム収束のための四重極磁石を周期的に配置する．現在存在する線形加速器でもっとも加速エネルギーの高いのは米国のスタンフォード研究所の線形加速器 [8] で最大エネルギーは 50GeV である．

1.3 Collider

加速された粒子は高エネルギー反応を起こために利用される。同じ反応でも座標系によってビームエネルギーが異るため、どのような座標系を取るかによってある反応を起こすのに必要なビームエネルギーは異る。以下、ある与えられたビームエネルギーでより高いエネルギーの反応を起こさせるには、同じ運動量の大きさを持つ粒子同士を正面衝突させるのが最も効率的であることを示す。このような加速器の構成をコライダー (Collider, 衝突型加速器) と呼ぶ。

反応のスケールを決める指標は運動量がゼロとなるような所謂重心系エネルギーである。相当するローレンツ不変量は s と呼ばれ

$$s = (\sum E_i)^2 - (\sum \boldsymbol{p_i})^2 c^2 \tag{1.9}$$

と定義される。ローレンツ不変量は反応の前後や、所謂ローレンツ変換で保存される量である．例えば二つの粒子を反応させて、未知の粒子のペア（粒子と反粒子）を作るとしよう。この反応が可能な最も低いエネルギーは未知の粒子が静止している状態であるから，

$$(E_1 + E_2)^2 - (\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2})^2 c^2 = (2Mc^2)^2, \tag{1.10}$$

である。ここで $E_1, \boldsymbol{p_1}$ と $E_2, \boldsymbol{p_2}$ は最初の二つの粒子の四元運動量（全エネルギーと運動量ベクトル）で、ローレンツ因子を使うと

$$E_1 = \gamma_1 mc^2, \tag{1.11}$$
$$\boldsymbol{p_1} = \gamma_1 \boldsymbol{\beta_1} mc \tag{1.12}$$

などと書くことができる．M を未知の粒子の質量とした．加速に必要なエネルギーは E_1 や E_2 にほぼ比例するので、最も低いエネルギーで新粒子を生成する条件は $\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} = 0$ であることは明らかだ。ここで簡単のために加速粒子は同じ質量 m を持つとする。運動量の条件より

$$\gamma_i \boldsymbol{\beta_1} mc + \gamma_2 \boldsymbol{\beta_2} mc = 0, \tag{1.13}$$

である．この条件を満すためには $\gamma_1 = \gamma_2$ でなければならないので、これを γ と置くと、式 (1.10) は

$$(\gamma mc^2 + \gamma mc^2)^2 = (2Mc^2)^2, \tag{1.14}$$

となる．両者の自乗根をとれば

$$2\gamma m = 2M, \tag{1.15}$$

となる。すなわち、もともとの粒子の質量を γ 倍の粒子までが生成可能なことがわかる．

比較のため, 一方の粒子が静止している場合、すなわち加速した粒子を固定標的に打ち込む場合の重心系エネルギーを求めてみよう．加速された粒子の四元運動量は

$$E_1 = \gamma mc^2 \tag{1.16}$$
$$\boldsymbol{p_1} = \gamma \boldsymbol{\beta} mc, \tag{1.17}$$

である。また、静止している粒子の四元運動量は

$$E_2 = mc^2, \tag{1.18}$$
$$\boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{0}, \tag{1.19}$$

である。この系での s は

$$s = (\gamma mc^2 + mc^2)^2 - (\gamma \boldsymbol{\beta} mc)^2 c^2 == 2m^2c^4 + 2\gamma m^2 c^4, \tag{1.20}$$

となる．この系から同様に新粒子が二つ生成されたとすると，

$$2(\gamma+1)m^2c^4 = (2Mc^2)^2 \tag{1.21}$$

両辺の二乗根をとり

$$\sqrt{2(\gamma+1)}m = 2M, \tag{1.22}$$

を得る．この場合, 加速粒子の質量のおよそ $\sqrt{2(\gamma+1)}/2$ 倍までの新粒子が生成可能となる。コライダーの場合は γ 倍であったから、新粒子の生成能力は大きく劣ることがわかる。このような加速粒子の使い方を固定標的型と呼ぶ. このように固定標的型は新粒子の生成能力としてはコライダーに大きく劣るが、反応確率や標的粒子への操作性などはコライダーよりも優れている。固定標的には高密度の標的粒子が存在するので、ほぼ確実に粒子同士の反応が生じる。また、粒子の温度、電場、磁場、その他の条件も詳細に制御が可能である。これらの特性をコライダーで制御することは困難である。

1.4　現代の加速器

現代において粒子加速器は様々な場面でひろく利用されている．数として圧倒的に多いのは静電型の加速器で、加速電圧は 100kV 程度まで、X 線管などに利用されている．また電子線照射による自動車のタイヤの耐磨耗性の向上、医療機器の滅菌処理、イオン注入など材料改質などにも広く利用されている．

一方、最先端をめざす研究の分野では RF 加速による大型の加速器が華々しい活躍をみせている．昨年 2012 年の 7 月には CERN(欧州原子核研究機構）の LHC 加速器 (Large Hadron Collider) において、質量生成機構を担うとされる「ヒッグス粒子」が発見された．ヒッグス粒子は素粒子の標準模型において、最後の未発見粒子だったもので、その性質を調べることは「隠された階層構造」の発見へと繋がるかもしれない．歴史を遡れば、大型加速器が世界で次々に稼働を始めた 1960 年代には、それまで知られていなかった大量の「素粒子」が発見されていた．これは 19 世紀において、次々と未知の元素が発見されていったのと非常に似通った状況だったと言える．陽子、中性子、電子に加え、π, K, ρ, ω、ϕ, η, Σ、Λ, Ξ など次々に増える素粒子を前に、当時の物理学者はこんなにも素粒子はあるのか、と多少の困惑を覚えたに違いない．そしてそれが最終的にはクォークとレプトンというひとつ下の階層構造による統一的理解が確立したのが 1990 年代である．そこまでには多くの加速器実験がなされており、現代の物質観は加速器実験により確立したと言っても過言ではない．

他方、初期の加速器実験から電子が軌道を曲げられるときには強力な光、すなわちシンクロトロン放射光が電子の進行方向に発生することが発見された．この現象は粒子加速という観点からはやっかいな現象であるが、光源としてみると非常に優れた特性をもっている．そのため現在では放射光発生用の専用リングが多く建設され、物性物理研究に盛んに利用されている．最近では用途がひろがり、生命科学、微量元素分析、材料科学等の分野にも応用されている．放射光利用は高エネルギー加速器を利用して開始されたが、これらの加速器を第一世代放射光源という．その後、放射光専用の加速器が建設され、これらの加速器を第二世代放射光源という．1990 年代からは、放射光発生用の磁石であるアンジュレーターを組み込み、加速器設計も放射光性能に最適化した第三世代放射光源が世界各地で建設され、広く利用されている．現在では自由電子レーザー (Free ELectron Laser: FEL) に代表される第四世代光源と呼ばれるものが提案され、その一部は建設され実際に稼働を始めている．第四世代放射光源の定義は確立されていないが、第三世代光源の性能を凌駕するような X 線自由電子レーザーがその代表である．自由電子レーザーは従来の放射光源と異なり、高いコヒーレンス、短パルス性などを有し、線形加速器をベースとしており、その意味でも次世代と呼ぶに相応しい光源加速器である．

ここからは、加速器科学のこれからの方向性について考えて行きたい．加速器の方向性としてより高いエネルギー、あるいはより大きなパワーを目指すというのは自然な流れである．しかし従来の手法の延長では原理的な面からも、予算あるいは規模的な面からも限界を迎えていると言わざるを得ない．図 1.7 に Livingston 図というものを示す．これは横軸に年をとり、縦軸に加速エネルギーを示したものである．従来の加速器の教科書ではこの図は加速器の華々

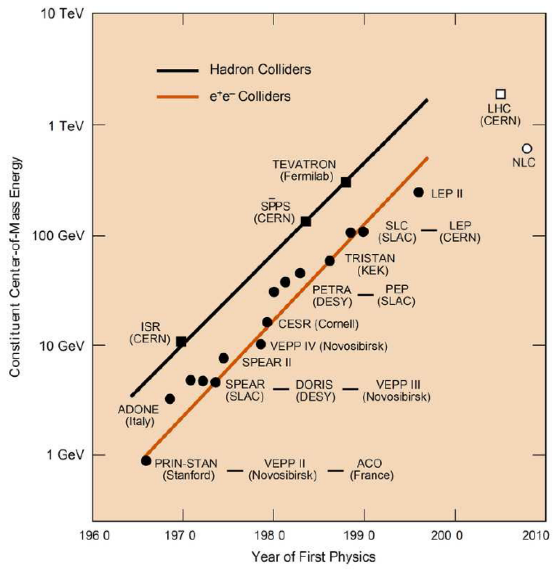


図 1.7　Livingston 図の例．横軸の年代、縦軸に加速エネルギー（重心系）を表示してある．[9])

しい発展を示すものとして示される．しかしここでは違う見方をしてみる．図には二つの直線が引かれており、ひとつは陽子 (反陽子）衝突型加速器、もう一つは電子-陽電子衝突型加速器である．各々年代を経るごとに指数関数的に増大し、およそ 10 年でエネルギーが十倍に増えているのがわかる．いかに過去の加速器技術の進歩が大きいものであったかがわかる．一方、2000 年以降に注目すると、陽子加速器では LHC(2012 年時点で 7TeV) があるのみである．LHC はこの図が作成された時点ではまだ稼働を開始していないので白抜きで表示されている．一方、 電子-陽電子衝突型で LEPII 以降に建設されたものはない．NLC は SLAC を中心に計画されていた線形加速器による電子-陽電子衝突型加速器であり、後述するようにその系譜は ILC(International Linear Collider, ILC 計画）として引き継がれているが、いまだに実現されていない．すなわち、陽子型、あるいは電子-陽電子型双方とも、過去のエネルギー増大の直線からあきらかにずれてきており、エネルギー増大が飽和してきているように見える．

加速器の発展に陰りが見えるともとれなくもない．

そこで別の角度から同じような図を見てみよう．図 1.8 は図 1.7 と同様に縦軸に加速エネルギー、横軸に年をとったものだが、異なる加速方式、実験方式を比較できるように、エネルギー表示を工夫したものである．加速器の利用方法には加速した粒子を固定標的に打ち込むものと、二つの加速した粒子を反対向きに衝突させる方法がある．高エネルギー現象を観測するには圧倒的に衝突型（コライダー）が有利である．他方、固定標的を用いた場合、物質密度の高さから反応の生じる確率は極めて高くなる．そのため、二次粒子粒子の生成や、一部の原子核反応など、エネルギーはさほど必要ないが、反応イベント数を稼ぎたい実験には固定標的が用いられる．図 1.8 の縦軸はすべて一方の粒子を静止させた状態で、他方の粒子のエネルギーで加速エネルギーを評価している．そのため、コライダーでは実際の加速エネルギーよりも桁違いに高い値となっている．この図では加速器の方式別に異なる色の曲線で到達エネルギーが示されている．特徴的なのは特定の加速方式をみると、かならずしもエネルギーが急激な増大を見せているわけではない、ということである．多くの場合、初期段階では急激な増大を見せるが、しばらくするとエネルギーが飽和している．すなわちおよそ上に凸な曲線となっている．しかしその年代におけるもっとも高いエネルギーの点を結ぶと、1930 年代から 2000 年にわたり指数関数的な急激なエネルギー増大が見られている．すなわち、指数関数的な急激なエネルギー増大というものは、次々と考案される新しい加速方式、加速器の利用方法の結果、もたらされたものである．これを加速器における多段ロケット式発展過程という[*1]．そう考えると、2000 年あたりからのエネルギー増大の

[*1] 筆者の発案である

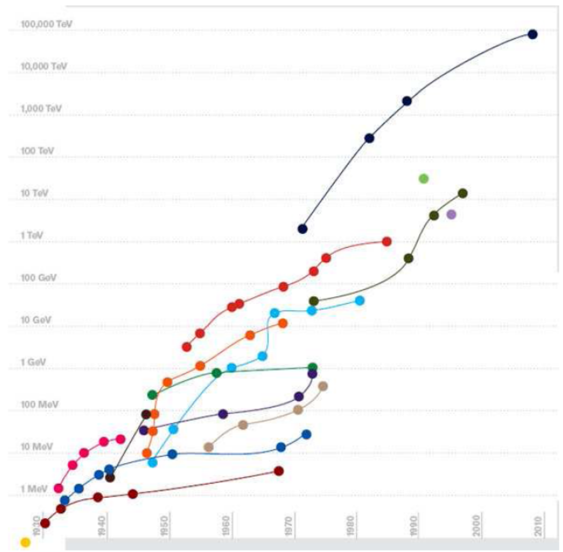


図 1.8　Livingston 図の例．横軸の年代、縦軸に加速エネルギー（衝突型の場合はひとつの粒子を静止させた系で、他方の粒子のエネルギーを表示）を表示してある．[10])

停滞の原因は、新しい加速方式が考案されていない、あるいは考案されてはいるが実現していないことに原因がある．

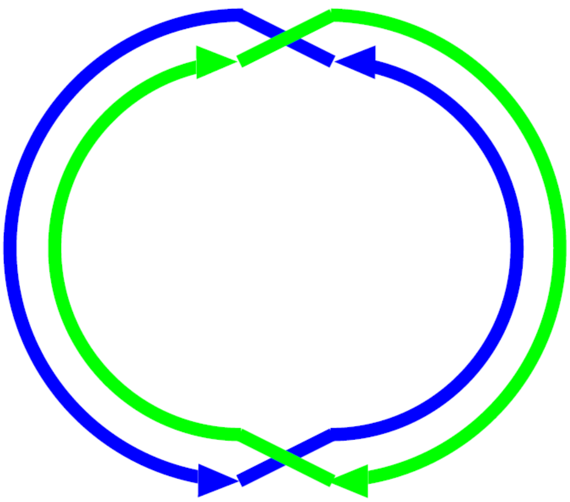


図 1.9　Ring 型コライダーの概念図．二つのリングに交差点を設け、粒子を衝突させる．

1970 年代から 1990 年代にかけて、円形リング蓄積型の電子-陽電子衝突型加速器が素粒子物理学の研究の上で大きな役割を果たした．加速器としては一種の電子 (陽電子) シンクロトロンであるが、図 1.9 のように周回軌道の一部に電子と陽電子の軌道が交差する場所を設けておき、そこで電子-陽電子対消滅反応による高エネルギー現象を起こさせる．電子と陽電子をともに同じエネルギーまで加速して衝突させると、式??に示すように、重心系でのエネルギーは加速エネルギーの倍となり、式??に示されるように固定標的実験に比べて桁違いに大きなエネルギーの現象を起こすことができる．そのような理由から、電子-陽電子蓄積リングによるコライダー（衝突型加速器）はまさに大車輪の活躍を見せたのである．KEK（現高エネルギー加速器研究機構）のトリスタン加速器 [15] は、周長 3km の地下トンネル内に二つの蓄積リング型の加速器を設置し 1986 年に 60GeV という当時の世界最高エネルギーを達成した．続いて LEP 加速器 [13] が CERN に建設され、91GeV にある Z_0 共鳴という弱い相互作用を媒介する極めて重要な役割を果たす粒子の性質を徹底的に調べ上げ、1990 年代の後半にかけて素粒子物理学の標準模型とよばれる体系の完成へと

繋がった．LEP 加速器を増強しより高いエネルギーを目指した LEPII 計画は、209GeV までエネルギーを増強して運転したが、その後それを二倍、四倍とするような計画は、現在まで実現に至っていない．それには次のような物理的な理由がある．

荷電粒子を加減速するさいには必然的に強い放射が発生する．これはシンクロトロン放射と呼ぶが、粒子の進行方向に対して垂直方向に加速（すなわち円運動）するさいに特に強い放射が発生する．その時の粒子あたりの放射パワーは

$$P = \frac{2}{3} c r_e m c^2 \frac{\beta^4 \gamma^4}{\rho^2}, \tag{1.23}$$

と記述される [19]．放出されるパワーは粒子のエネルギー (γ) の四乗に比例し、また軌道半径の二乗に逆比例することがわかる．シンクロトロンにより高エネルギーまで粒子を加速する場合、その到達エネルギーは軌道電磁石の磁束密度で決まると書いたが、実はこの放射パワーと加速量が等しくなるとそれ以上の加速は不可能となる．より高いエネルギーまで到達するには、軌道半径を大きくするか、一周あたりの加速量、すなわち加速空洞の電界を増大させる、あるいは加速空洞の数を増やす、などを行わなくてはならない．しかもその量はエネルギーの四乗で増加していく．例えば、LEPII ではビームエネルギーがおよそ 104.5GeV（重心系にして 209GeV) であるが、その時の一周あたりのエネルギー損失は 2.1GeV と莫大であった．これを二倍、三倍と増やすには一周あたりの加速エネルギーを 16 倍、81 倍と増加させなくてはならず、とても現実的ではない. たとえば、仮に蓄積電流を 10mA としてみよう．シンクロトロンによるエネルギー損失に等しい値を再加速により供給する必要があるから、104.5 GeV のビームエネルギーを維持するのに必要な電力は

$$P = 2.1 \times 0.01 \times 2/0.1 = 0.42[GW], \tag{1.24}$$

となる。0.1 という係数は、ビーム加速に必要なエネルギーの効率係数で、10% を仮定している。ビームエネルギーを二倍にしようと思えば、必要電力は 6.7GW、四倍にしようと思えば、107GW となる。ちなみに 2011 年の日本の消費電力は 109GW である。いかに大量の電力を投入しないと、いけないかがわかる。円形加速器による高エネルギー電子加速は大きな限界を迎えている。

図 1.10　リニアコライダーの概念図．二つの線形加速器で加速した粒子を衝突させる．

そこで考え出されたのがリニアコライダーというコンセプトである．リニアコライダーは図 1.10 に示すように二つの線形加速器で粒子を加速し、そのまま衝突させる．リニアコライダーの提案は 1960 年代まで遡る [12] が、現在までに実際に運転された加速器としては SLAC の SLC(SLAC Linear Collider) があるのみである．SLC 加速器は LEP と同時期に運転された加速器で、ともに Z_0 共鳴の詳細解析をめざしてしのぎを削っていたが、LEP が圧倒的なデータ量を蓄積したのに対して、SLC は偏極電子ビームを利用した高精度測定を実現し、ともに素粒子の標準模型確立に多大な貢献をした加速器である．

ここで円形加速器 (シンクロトロン）と線形加速器の建設コストを比較してみよう．仮定としては、リングコライダーのコストは加速エネルギーの四乗に比例するとする．これは 1.23 で示すように、電子シンクロトロンからのシンクロトロン放射パワーはエネルギーの四乗に比例するからである．低エネルギーにおいてはこの依存性は当てはまらないが、すでに LEP が達成した 100GeV というビームエネルギーでは一周あたりの放射エネルギー損失が 2GeV にまで達している．この値はすでにこれ以上のエネルギー増大を行う場合、つぎ込むエネルギー量、そして設置する加速空洞の数の四乗でに比例してコストが増大することを示している．それに対してリニアコライダーでエネルギー増大を行う場合、シンクロトロン放射は無いので設置する加速空洞の数に比例して増大する．しかしリングコライダーに比べ、衝突点が長大であり、かつダンピングリング等のエネルギーにスケールしない施設が多く必要なため、エネ

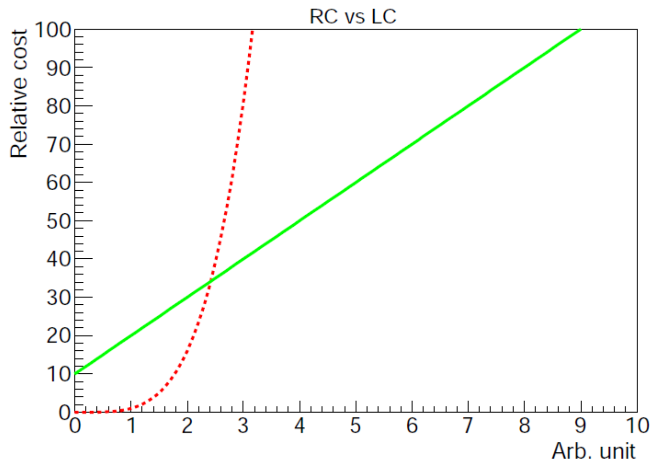


図 1.11 リングコライダーとリニアコライダーの概念的なコスト比較．低エネルギー領域ではリングコライダーが、高エネルギー領域ではリニアコライダーが優位となる．

ルギーゼロでのコストを多く見積もっている．実は正確に各々のコストを見積り比較することは困難である．機器の値段や運転コストに加えて人件費、地価、建物の建設費用などにより、両者のクロスオーバーする地点は変化する．この横軸は Arbitrary unit すなわち不定の単位であり、クロスオーバーの点がどのエネルギーにあるかを示すものではない．それでも多くの加速器科学者は 200GeV での LEP の運転が高エネルギーでの最後のリング型コライダーになると思っている．少なくとも、最初のリニアコライダーである SLC が LEP と競合したことかが重心系エネルギーにおいて、100-200GeV あたりにクロスオーバーがある間接的な証拠である．

このような状況があり、リニアコライダー建設についての多くの努力がなされてきた。SLC は既存のスタンフォードの線形加速器を利用した初のリニアコライダーであるが、米国、ドイツ、CERN、そして日本で次世代リニアコライダーの研究開発と計画立案が 1990 年代から進められてきた。それぞれ目標とするエネルギーは異なるが、およそ 500GeV から 3.0TeV までである。これらの計画のうち、500GeV から 1.0TeV を目標とする米国、日本、ドイツの計画は世界的に一本化がはかられ、世界統一プロジェクトとして推進することが決定された．これが International Linear Collider, ILC プロジェクト [16] である。ここで詳細を述べる余裕はないが、現在の計画案では初期エネルギーとして 250GeV からスタートして 500GeV までエネルギーアップグレードを行う。また、技術的には 1.0TeV までアップグレード可能な案とすることが決定している。2012 年 12 月にこれまでの研究開発と設計検討の成果をまとめた TDR(Technical Design Report) が上梓され、プロジェクト開始の準備が整った。世界に建設候補地は 4 箇所あるが、その最有力候補地は日本にある。もともと 2 箇所あった日本の建設候補地について、2013 年に科学技術的観点、および社会的な観点から選定作業がすすめられ、その結果、岩手県の北上山地を第一の建設候補地にすると決定された。現在、その建設予定地を前提とした ILC の日本建設にむけた具体的な動き、すなわち詳細設計が進んでおり、数年以内の詳細技術設計書の完成が待たれる。また、2013 年度の学術会議の答申 [17] に基づき、科学的意義はもちろんのこと、納税者への説明責任、海外の研究の動向など、多くの面から ILC プロジェクトを評価し、日本での建設をおこなうべきかどうか検討するための専門家委員会が組織され、精力的な検討が進められている。筆者もそれに深く関わる一人として、その進展に期待するものの一人である。

第 2 章

加速の基本条件

加速器は粒子のエネルギーを増大させる装置であるが、力学的に見るとその機能は加速 (acceleration) と収束 (focus) である. 加速の意味は明らかであるが, 収束についても粒子加速について本質的に重要な役割を演じている. この章では加速器中における粒子加速が可能な基本条件について説明を行う.

2.1 相対論の基礎関係式

粒子加速器においては、多くの場合相対論的な粒子を取り扱う。粒子加速器においては重力は重要ではないため、扱うのは特殊相対論である。特殊相対論では相互に一定の速度で動く慣性系の間の座標変換はローレンツ変換で表される。古典的なガリレオ変換においては、空間成分のみが変換されたが、ローレンツ変換では、空間成分と時間成分が混じる。具体的には空間と時間からなる空間：ミンコフスキー空間における回転で表される。

観測者に対して静止している系を S 系、相対速度 $\beta \equiv v/c$ で移動している系を S^* 系とする。移動方向を z 軸にとると、各座標成分は以下のように変換する。

$$x = x^* \tag{2.1}$$
$$y = y^* \tag{2.2}$$
$$s = \gamma(s^* + \beta ct^*) \tag{2.3}$$
$$ct = \gamma(ct^* + \beta s^*), \tag{2.4}$$

ここで γ は相対論のガンマファクターと呼ばれるもので、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.5}$$

と定義される。γ は $\beta = 0$ で 1 となり、$\beta \to 1$ の極限で無限大に発散する。すなわち, いくら加速しても粒子の速度が光速を超えることはない.

2.1.1 ローレンツ収縮

S 系で長さが $\Delta L = s_2 - s_1$ の棒がある。各々をローレンツ変換により S^* 系に変換すると、

$$\Delta L = s_2 - s_1 = \gamma(s_2^* - s_1^*), \tag{2.6}$$

となる。この棒は S 系では静止している二点で定義されるが、S^* 系では移動する二点で定義される。すなわち、観測する系にたいして、一定の速度で移動する物体はその進行方向に $1/\gamma$ だけ圧縮して見える。これをローレンツ収縮とよぶ。

このローレンツ収縮により、体積 V も収縮をうける。移動する物体の体積 V^* は静止している場合 V に比べて

$$V = \gamma V^* \tag{2.7}$$

のように圧縮される。

また電荷量は保存されるので、体積が減少したぶん、電荷密度は増加しなければならない。移動する電荷分布の電荷密度は体積の減少により

$$\rho = \frac{\rho^*}{\gamma}, \tag{2.8}$$

のように増加する。

2.1.2　時間の遅れ

S^* 系における固定点（S 系における移動点）をある時間 t_1 と t_2 に観測したとする。そのとき次の関係式が成り立つ。

$$t_2 - t_1 = \gamma(t_2^* + \beta s^*) - \gamma(t_1^* + \beta s^*), \tag{2.9}$$

S^* 系における固定点は移動しないので、s^* とした。これより

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t_2^* - t_1^*) = \gamma \Delta t^* \tag{2.10}$$

となる。すなわち、移動している慣性系では時間の進みが $1/\gamma$ だけ遅くなる。

2.1.3　エネルギー

相対論的全エネルギーは次の式のように静止質量項と運動エネルギー項とからなる。

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2, \tag{2.11}$$

ここで m_0 は粒子の静止質量である。運動量は古典的な場合とほぼ同様に

$$p = \gamma m_0 \beta c, \tag{2.12}$$

と表されるので、これより

$$E = \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2, \tag{2.13}$$

が導かれる。すなわち、粒子が静止している状態にくらべ、運動している時の全エネルギーは γ 倍だけ大きくなる。

静止エネルギーからの増分は運動エネルギーとして次のように定義される。

$$E_{kin} = E - E_0 = (\gamma - 1)E_0. \tag{2.14}$$

E および E_{kin} の増分は仕事に相当し、

$$\Delta E = \Delta E_{kin} = \int_L \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}, \tag{2.15}$$

として定義される。

2.1.4　運動量

運動量は通常光速 c を乗じて cp の形で表記される。この時、

$$cp = \gamma mc^2 \beta = \beta E, \tag{2.16}$$

と、運動量とエネルギーは独立ではない。運動量の増分は力積として

$$\Delta \boldsymbol{cp} = c \int \boldsymbol{F} dt, \tag{2.17}$$

と与えられる。積分を時間から距離 $\boldsymbol{ds}$ へと変更すると、

$$\Delta cp = \frac{1}{\beta}\int \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds} = \frac{E}{\beta}, \tag{2.18}$$

と式 (2.16)、整合する結果が得られる。

$$cp = \gamma\beta mc^2 = mc^2\sqrt{\gamma^2-1}, \tag{2.19}$$

を両辺微分すると、

$$d(cp) = \frac{mc^2}{\beta}d\gamma, \tag{2.20}$$

が得られる。また式 (2.19) を変形して

$$cp = \sqrt{E^2-E_0^2}, \tag{2.21}$$

となるので、これを両辺微分して、

$$d(cp) = \frac{E}{\sqrt{E^2-E_0^2}}dE = \frac{1}{\beta}dE, \tag{2.22}$$

を得る。

2.1.5　四元運動量と保存量

特殊相対論においても、古典力学と同様にエネルギーと運動量は各々反応の前後で保存する．即ち

$$\sum E_i = \sum E_j \tag{2.23}$$

$$\sum \boldsymbol{p_i} = \sum \boldsymbol{p_j} \tag{2.24}$$

が常に成り立つ．

エネルギーと運動量を組として、次のように四元運動量を定義する．

$$\boldsymbol{p} = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z) \tag{2.25}$$

四元運動量の内積を不変質量 W として定義する。四元運動量の内積は

$$W^2c^2 \equiv \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p_k}\cdot\boldsymbol{p_k}, \tag{2.26}$$

ここで四元運動量の内積は通常の内積とは異なることに注意。また、右辺の $\boldsymbol{p_k}$ は三次元運動量である．

例として単粒子の四元運動量を代入すると

$$W^2c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p_k}\cdot\boldsymbol{p_k} = \left(\frac{\gamma m_0c^2}{c}\right)^2 - (\gamma\beta m_0c)^2 = m_0^2c^2 \tag{2.27}$$

となる。すなわち、粒子の静止質量 m_0 は粒子の四元運動量から求められる不変質量 W に等しい。粒子の質量はローレンツ不変な量である．

四元運動量の保存と粒子の質量がローレンツ不変であることから、次のように複数の粒子からなる系についても，不変質量がローレンツ不変であることが導かれる。

$$W^2c^2 \equiv \left(\sum\frac{E_i}{c}\right)^2 - \sum\boldsymbol{p_i}\cdot\sum\boldsymbol{p_i}, \tag{2.28}$$

一つの粒子が複数の粒子に崩壊した場合、崩壊により生成された粒子の不変質量を求めると、最初の粒子の静止質量が得られる．

2.2　電磁場中での粒子の運動と加速

2.2.1　運動方程式

電磁場中で粒子がうける力はローレンツ力として次のように与えられる。

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + qc\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}, \tag{2.29}$$

運動量変化は力積に等しいので、

$$\frac{\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{2.30}$$

となる。この二式より粒子の運動方程式

$$\frac{\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\gamma\boldsymbol{\beta}c\right) = e\boldsymbol{E} + qc\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}, \tag{2.31}$$

が導かれる。微分公式より

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma\boldsymbol{\beta}c) = m\boldsymbol{\beta}\frac{\gamma}{dt} + m\gamma c\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \tag{2.32}$$

$$= mc\left(\gamma\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} + \gamma^3\beta\frac{d\beta}{dt}\boldsymbol{\beta}\right), \tag{2.33}$$

が導かれる。

$\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{\beta}$ に対して平行な場合、β のスカラーとベクトルの時間微分は可換となるから、

$$\boldsymbol{F}_{\parallel} = \frac{d\boldsymbol{p}_{\parallel}}{dt} = mc\gamma^3\frac{\boldsymbol{\beta}_{\parallel}}{dt}, \tag{2.34}$$

となる。一方、$\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{\beta}$ に対して直角な場合、β のスカラー微分はゼロとなる（進行方向に直角な加速成分により、速度の大きさは変化しない）ので、

$$\boldsymbol{F}_{\perp} = \frac{d\boldsymbol{p}_{\perp}}{dt} = mc\gamma\frac{\boldsymbol{\beta}_{\perp}}{dt}, \tag{2.35}$$

となる。すなわち加速方向が進行方向にたいして平行な場合と直角な場合で実効的な質量がことなる。定性的には、平行な方向の加速の場合、加速は進行方向の運動量とともに質量の増加にも寄与するので、その分加速は抑制される。一方、力が進行方向と直角な場合には、進行方向の運動量変化のみを生じ、質量の増加には寄与しないので、加速は大きくなる。

2.2.2　電磁場による加速

加速は文字どおり粒子を加速することであるが、より厳密に定義すれば粒子のエネルギーあるいは γ を増加させることである。エネルギーの増加は仕事として式 (2.15) 示されている。これに式 (2.29) 示されているローレンツ力を代入すると、

$$\Delta E = \int q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} + qc\int(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{s}, \tag{2.36}$$

となる。ここで第一項は電場による加速、第二項は磁場による加速である。しかし第二項は次に示すように恒等的にゼロとなり、磁場による加速は生じない。積分要素を $d\boldsymbol{s} = c\boldsymbol{\beta}dt$ のように時間を変数とすると第二項は

$$qc\int(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B})\cdot c\boldsymbol{\beta}dt, \tag{2.37}$$

となる。二つの等しいベクトルを含むスカラー三重積は恒等的にゼロとなるので、この積分も常にゼロとなる。従って加速するためには電場が必要である。さらに加速は $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}$ に比例するため、粒子の進行方向に対して平行な電場成分が必要である。

もっとも単純な場合は DC 電場（時間的に変動しない電場）による加速である。粒子の進行方向に対して平行に長さ L にわたり電場 $\boldsymbol{E}$ があると、

$$\Delta E = \Delta(\gamma mc^2) = e\int_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = eEL, \tag{2.38}$$

だけ加速が生じる。

一般的に電場と磁場の間には、Maxwell 方程式で示されているように

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}, \tag{2.39}$$

の関係がある。これより、磁場が時間的に変化する場合、必然的に電場が発生するため、加速することが可能となる。RF 線形加速、ベータトロン、誘導加速などはこの原理によっている。これをより明示的に表すため、Stokes の定理により式 (2.39) 次のように変形する。

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{a} = \int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\cdot d\boldsymbol{a}, \tag{2.40}$$

これより、任意の閉回路 C の内部を貫く磁束が時間的に変動する場合、その閉回路に沿って電場 $\boldsymbol{E}$ が発生することがわかる。この方式を具現化したものがベータトロンである。

今、s 方向に伝搬する電磁波の電場成分が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{E_0}\exp\imath(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s} + \phi_0), \tag{2.41}$$

で表されるとしよう。すなわち電場が角周波数 ω で振動し、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ で伝搬している。この時の位相速度（波の位相が進行する速度）は

$$v_p = \frac{\omega}{k}, \tag{2.42}$$

で与えられる。ここで k は $\boldsymbol{k}$ の大きさ、あるいは特定の方向の成分である。この電場による加速は次のように表される。

$$\Delta E = \int_L e\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = ce\beta\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\phi})dt, \tag{2.43}$$

この時、電場の位相成分を書き出すと、

$$\phi = \imath\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s} + \phi_0\right) \tag{2.44}$$

となる。電磁波の伝搬方向を s 方向と平行とし、かつ粒子の速度を βc とおくと、位相成分は

$$\phi = \imath\left(\omega t - k\beta ct + \phi_0\right), \tag{2.45}$$

となる。この時に位相が時間に関して恒等的である、すなわち時間に依存しないと仮定すると、

$$\omega - k\beta c = 0, \tag{2.46}$$

となる。式 (2.42) 与えられる位相速度を代入するとこの条件は

$$v_p = \beta c, \tag{2.47}$$

となる。すなわち位相速度ど粒子の速度が等しい場合、粒子は一定の位相で加速されることになる。この時の加速は式 (2.46)、式 (2.43)、および (2.44) に代入して、

$$\Delta E = \int_L q\boldsymbol{E_0}\exp\left(\imath\phi_0\right)\cdot d\boldsymbol{s} = eE_0\exp\left(\imath\phi_0\right)L, \tag{2.48}$$

となる。

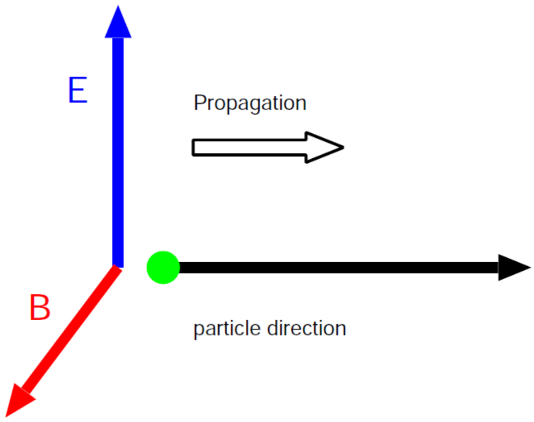


図 2.1　自由空間を伝搬する電磁場と粒子。電場は進行方向と直行するので、うまく加速されない。

一般的に平面波（自由空間を伝搬する電磁波）の位相速度は光速 c に等しく、充分に高エネルギーの電子の速度 βc も光速にほぼ等しいので、平面波によって加速が容易に実現されそうな気がするが、実は平面波による加速は困難である。その様子を図 2.1 に示す．この図では平面波は右方向に粒子と同じ方向に同じ速度で伝搬する。しかし電磁場は横波であるから、電場も磁場も伝搬方向に対して垂直の方向を向いており、伝搬方向には電場成分を持たない。従って仮に同期条件が満たされたとしても、少しばかり横方向に曲げられるが, いつまでたっても加速されない。

平面波ではなく、円筒型のパイプなどを伝搬する電磁波には伝搬方向と平行な電場成分を持つものがある。これを TM (Transverse Magnetic) mode と呼ぶ TM mode は複数の平面波の重ね合わせから構成される．図**??**(a) に二つの伝搬方向の異なる電磁場を重ね合わせた場合を示してある。簡略化のため、磁場は省略した。この場合、合成された電場は粒子の進行方向と一致するので、実効的な加速が可能である。しかし、各々の電磁場は異なる方向に伝搬していくので、すぐに散逸してしまい、加速の有効長は短く、効率的ではない。そこで、図**??**(b) にしめされているように、上下に電磁波を反射するための金属板を設置してやると、電磁場は金属板の間の空間に閉じ込められ散逸せず、加速電場を長い区間に渡って維持することが出来る。

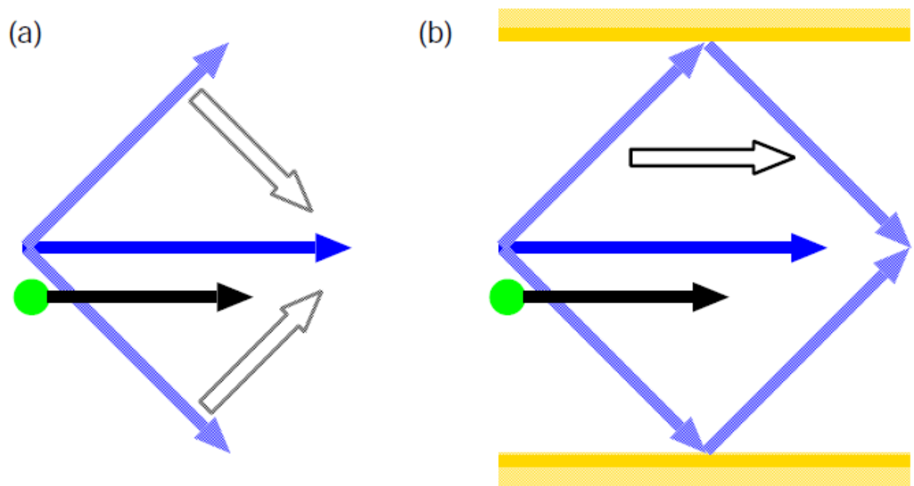


図 2.2　(a) 二つの電場を重ね合わせると、加速電場をつくれる。(b) さらに境界条件を加えると、電磁波は散逸せずに、粒子と同じ方向に伝搬する。

しかしこれだけではまだ加速は出来無い．一般的な境界条件による TM モードの進行方向の位相速度は光速より

も大きくなってしまうからである。これを説明しよう．今, 図 2.3 のように二つの平面波によって TM mode がつくられており, その TM mode の伝搬方向 (図右方向) に対して平面波の伝搬方向は角度 θ をなしているとする．TM mode は平面波の重ね合わせであるから, TM mode の位相は平面波の等位相面の位相と等しい．従って平面波の位相が光速 c で θ 方向に移動するので, TM mode の位相は進行方向に対して光速 c よりも速い速度で進む．その値は $v_p = c/\cos\theta$ である．如何なる粒子も相対論によるとその速度は光速を越えることはできないため、このままでは同期条件 (2.47) を満たすことは困難である。

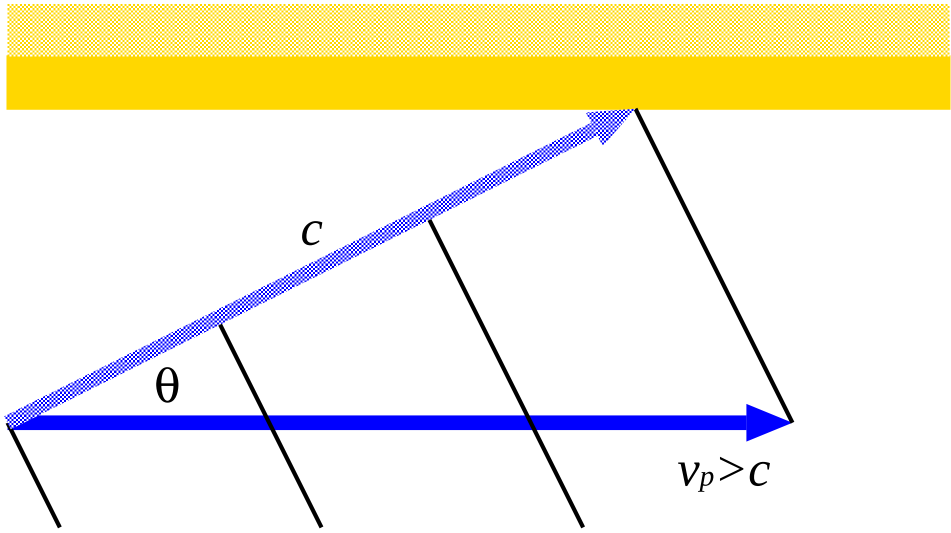


図 2.3　平面波に対して傾いた方向に伝搬する TM mode の位相速度は光速 c よりも大きくなる．

以上のように, 単純な導波構造の中を伝搬する TM モードの位相速度は光速 c を超てしまい加速は不可能である．位相速度を光速、あるいはそれ以下となるように設計された特別な導波構造を加速管と呼んでいる．その詳しい議論は後に譲るが, 加速管では位相速度を抑制するために滑らかな導波構造の中に人為的にサセプタンス（電磁波の伝搬を妨害するもの）を導入し、電磁波の位相速度を抑制している。加速空洞の設計においては、以上のような単純な電磁場の閉じ込めという機能の他に、境界条件としての金属容器の形状や大きさを調整することで、粒子と電磁場の同期条件、すなわち、粒子が常に電磁場の同じ位相に乗り続け加速されるように設計する．実際の加速器においては多くの加速空洞を並べ、あるいは円形加速器の場合は繰り返し同じ空洞内を通過させ、粒子加速を行うので、加速構造内部の TM mode と粒子の同期条件と同様に, 多数ある加速管の間、あるいは繰り返し加速される際の位相同期条件が重要となる．

2.2.3　位相安定性の原理

前節で加速を行うためには粒子の進行方向に粒子と同じ位相速度で伝搬し、かつ伝搬方向に成分をもつ縦波の電磁場が必要なことが明らかとなった。この節では, その同期条件からすこしだけずれた粒子についても加速が維持される条件について考える．

加速器の設計を行う場合、基準となる粒子の種類やエネルギーなどを仮定する．その粒子を基準粒子 (reference particle) といい、その粒子の軌道を基準軌道 (reference orbit あるいは reference trajectory) という．加速がうまく行われるかどうかは、上で述べたような位相同期条件が基準粒子周辺に分布する粒子で、安定して実現できるかどうかにかかっている．なぜなら、現実の粒子のかたまりは理想的な条件のまわりに有限の広がりをもって分布しており、位相同期条件から「ずれた」粒子が安定して加速されない場合、粒子が次々にこぼれ落ちて、高いエネルギーまで加速される粒子は最終的にゼロとなる．「ずれた」粒子が加速可能かどうかは、粒子の高エネルギーへの加速のために

は不可欠の条件である．1945 年に V. I. Veksler と、E. M. MacMillan は位相同期条件からずれた粒子でもうまく加速できるという位相安定性の原理を各々独立に見出した．

位相安定性の原理とは、うまく条件を整えてやれば、同期位相のまわりに分布する粒子を安定して加速することが可能である、ということだ．ここでは周長 C の円形加速器について考察することにしよう．同様の考察は線形加速器においても可能である．円形加速器には加速空洞が設置されており, 粒子は加速空洞により周回するたびに

$$\frac{dp}{dt} = \frac{eV}{C} \sin\phi, \tag{2.49}$$

だけ加速され運動量変化を受けるとしよう．位相は $\phi = \phi_s + \varphi$ のように記述し、同期粒子の位相を ϕ_s として、同期粒子は常にこの位相で加速される．φ は同期粒子からのずれを表す．同期粒子がうける加速量からのずれを運動量で Δp と置くと

$$\frac{d\Delta p}{dt} = \frac{eV}{C}(\sin\phi - \sin\phi_s) \sim \frac{eV}{C}(\varphi\cos\phi_s), \tag{2.50}$$

と近似的に表すことができる．すなわち同期粒子からの位相のずれ φ に比例して、加速量が増減し、その比例定数は同期位相 ϕ_s に依存する．

次に基準粒子からずれた粒子の位相がどのような変化を示すかを求める．運動量が基準粒子からずれた粒子は、速度の違いと、軌道長の違いにより周回時間に変化が生じる．運動量が大きい粒子はもちろん速度が大きいので、一定の周長をまわる周回時間は短くなるが、その差は粒子の運動量に依存する．例えば超相対論的領域では、速度は光速に飽和するので、速度による効果は大きくない．速度による周回時間 $\tau = C/(\beta c)$ の変化は

$$\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)_\beta = -\frac{\Delta\beta}{\beta} = -\frac{1}{\gamma^2}\frac{\Delta p}{p}, \tag{2.51}$$

と表される．一方、軌道長の変化は、磁場中での軌道半径の変化により生じ、運動量の変化に比例する．具体的な比例係数は加速器の設計に依存するが、その比例定数を Momentum Compacation Factor といい、α とおく．すなわち

$$\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)_\alpha = \frac{\Delta C}{C} = \alpha\frac{\Delta p}{p}, \tag{2.52}$$

である．Momentum compaction factor α は Dispersion を用いて次のように書くことができる。

$$\alpha = \frac{1}{C}\int\frac{D(s)}{\rho(s)}ds. \tag{2.53}$$

これらをまとめて

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \alpha\frac{\Delta p}{p} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\Delta p}{p} = \eta\frac{\Delta p}{p}, \tag{2.54}$$

とおくことが出来る．第一項が周長の変化、第二項が速度の変化を表す．　η は粒子の速度と加速器設計からきまる定数である．この時間変化を位相に焼き直すと

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{\Delta\tau}{\tau} = \omega\eta\frac{\Delta p}{p}, \tag{2.55}$$

式 2.55 を式 2.50 に代入すると位相のずれ ϕ についての微分方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\omega\eta}\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{eV}{C}\varphi\cos\phi_s, \tag{2.56}$$

が得られる．ここで p や η の時間変化が位相の変化にくらべて緩やかであるとして定数として扱うと

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{eV\omega\eta\cos\phi_s}{pC}\varphi, \tag{2.57}$$

という二階の線形微分方程式を得る．よく知られているように、この方程式の解は、比例係数が正の場合は発散し、負の場合は振動する．すなわち、比例定数を負に選べば位相は振動するので、すべての粒子は基準粒子の周りを振動しながら加速される．このような振動をシンクロトロン振動と呼ぶ．

うまく加速できるかどうかは粒子が発散せずにシンクロトロン振動をするかどうか、すなわち $\eta \cos\phi_s$ の符号に依存する．一般的に低エネルギーでは速度変調の効果が大きく η の符号は負となるので、$\cos\phi_s$ は正に取らなければいけない．一方、高エネルギーでは軌道長変化の効果が大きく η の符号は正となるので、$\cos\phi_s$ の符号は負に取らなければいけない．陽子加測器などでは加速していくとあるエネルギーで η の符号が逆転するので、それを境に加速位相 ϕ_s を変えなければいけない．これを critical energy と呼ぶ．Momentum Compaction は

$$\eta = \alpha - \frac{1}{\gamma}, \tag{2.58}$$

と書けるので、これがゼロとなるのが critical energy である．すなわち

$$\gamma_c = \frac{1}{sqrt\alpha} \tag{2.59}$$

である．

2.2.4　強収束の原理

前節では加速、言うなれば縦方向の位相空間の安定性について、考察した．この節では横方向、すなわち加速方向に対して垂直な方向の安定性について考察する．横方向の運動に安定性がないと、基準軌道からずれた粒子はそのずれを増大させ、最終的には真空容器の内壁に衝突して失われる．粒子の横方向の運動でも収束力が働くような条件が必要である．

歴史的には、このような粒子軌道の安定性についての議論は、ベータトロンと呼ばれる加速器について初めて行われた．そのような経緯から、粒子の基準軌道を中心とした横方向の振動をベータトロン振動と呼ぶ．粒子はある振幅をもってベータトロン振動をしながら安定して加速器中を進行する．ベータトロン振動の詳しい議論は次章で行うので、ここではその概要を示すに留める．日本語での教科書には亀井亨、木原元央著、パリティ物理学コース「加速器科学」[2]、岩波講座「加速器とビームの物理」平田光司著 [3] などがある．また高エネルギー加速器研究機構 (日本）[4] や CERN（欧州原子核物理共同研究所）などが運営する加速器スクールの講義資料 [5] なども参考となる．

加速器における粒子の横方向の収束は、当初弱収束という手法で行われていた。この手法では、粒子の軌道を磁場で曲げる際に、磁場分布にある特定の条件を設けることで、粒子の軌道制御と収束を同時に行う。具体的には、磁場を軌道半径 r に対して

$$0 < -\frac{r_0}{B_0}\frac{\partial B}{\partial r} < 1, \tag{2.60}$$

とする．ここで r_0 は基準となる軌道半径、B_0 は二重極磁石の基準軌道における磁束密度、r および B は軌道半径およびそこでの磁束密度である．上の条件から磁束密度は軌道半径が増大するにしたがい少しづつ弱くしなくてはならない．このような設計指針を弱収束と呼ぶ．この場合は磁場分布は

$$B(\rho) = B_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n \tag{2.61}$$

という関数で与えられる．この時、発生するローレンツ力と遠心力の釣り合いを考えると

$$F = \frac{mv^2}{r} - qvB_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \tag{2.62}$$

となる．基準粒子については $mv = qr_0B_0$ がなり立つから, 粒子に働く力は

$$F = \frac{mv^2}{r}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}\right] \tag{2.63}$$

となる．収束力が働くためには $n < 1$ でなくてはならない．

また、半径方向とは垂直な方向については, $n > 0$ の場合に収束力が得られることが磁束密度の考察からわかる．従って, 双方とも収束効果を得るために $0 < n < 1$ という条件を満す磁石を用いる必要がある。

弱収束の原理によって設計された加速器にはいくつか問題がある．まず一つ目は、収束力を得るには軌道を曲げる必要があるため、設計に大きな制限が加わる。また、強い収束力は得られないため、どうしても粒子の振動振幅は大きくなる．後述するサイクロトロンなどでは軌道半径が大きくなるにつれて磁束密度を小さくしなければならず、原理的な加速の上限を与える．

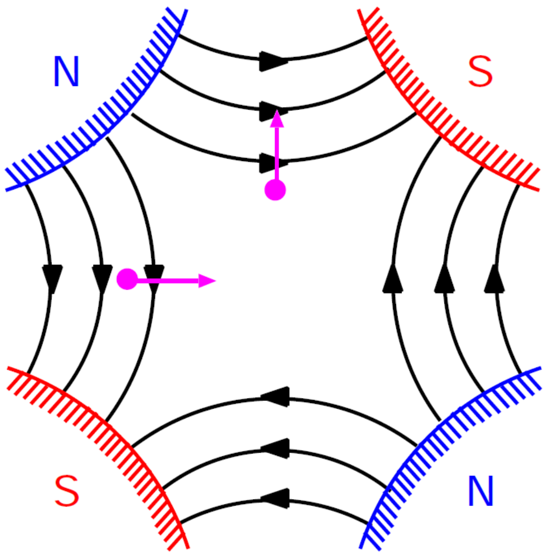


図 2.4　四重極磁場の例．中心では磁束密度はゼロだが中心からの距離に比例して磁束密度が増加する．一つの軸には収束力、別の軸には発散力として作用する．

これに対して、四重極磁場や、磁場勾配の符号の異なる磁極を並べることで、より強力な収束力を実現できることを示したのが強収束の原理である [6],[7]．四重極磁場とは磁極を図 2.4 のように並べたもので、中心では磁束密度はゼロだが、そこからの変位に比例するような磁束密度が分布している．磁場勾配とは 2.60 で示した偏微分で定義される量である．いずれの場合も、単独の磁石ではある方向には強力な収束力を発生させるが、それとは 90 度異なる方向には同じ強さの発散力を発生させる．強収束の原理はしばしば光学レンズとの類推で説明される．光学レンズには収束させる凹レンズと発散させる凸レンズがあるが、この二つを距離 d だけ離して配置した場合の焦点距離は

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}, \tag{2.64}$$

で与えられる．$f_1 > 0$ で凸レンズ、$f_2 < 0$ で凹レンズとし、$f_1 = -f_2$ と仮定すると、この系全体での焦点距離は

$$\frac{1}{F} = -\frac{d}{f_1 f_2} > 0, \tag{2.65}$$

となり、常に収束作用をもつことがわかる．すなわち四重極磁場の磁極の並べ方の異なる磁石、あるいは磁場勾配の符号の異なる二重極磁石を交互にならべることで、いずれの方向にも収束力を作用させることが可能である．これを強収束の原理という．

強収束の原理は加速器の設計に大きな影響を与えた．収束力を大きくすることでビーム半径を小さく抑えることが可能となり、ビームを収める真空容器を格段に小さくすることができるようになった．また、収束作用と二重極磁場が分離され、加速器設計の自由度が大幅に向上した．現代の、とくに大型の加速器はすべてこの強収束の原理に基づき設計されている．

第 3 章

ビーム力学の基礎

3.1　粒子の軌道の表現と行列表示

3.1.1　座標系の定義

加速器において、粒子の座標は特殊な曲線座標系を用いる。それを図 3.1 に示す．加速器の設計においては、ある決まった初期位置、運動量を持つ理想的な粒子を基準粒子 (reference particle) として粒子軌道の基準とする．ここでいう s その基準粒子の軌道である．通常は時間 t をパラメーターとして、粒子の位置や運動量を記述するが、加速器では基準粒子の s 方向の道程をパラメーターとする．すなわち s は適当な場所を原点として、基準粒子の軌道にそった道程を表す変数である。各点において s の方向の直交する二方向に x と y 方向をとる．各粒子の位置は s をパラメーターとして $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ のように記述する．また、運動量は力学的な運動量の代わりに s 方向の運動量で規格化したものを用い、それを x', y' とおく。すなわち

$$x' \equiv \frac{p_x}{p_s} = \frac{dx}{ds}, \tag{3.1}$$

$$y' \equiv \frac{p_y}{p_s} = \frac{dy}{ds}, \tag{3.2}$$

である．x' と y' は粒子の s 方向からの傾きである．

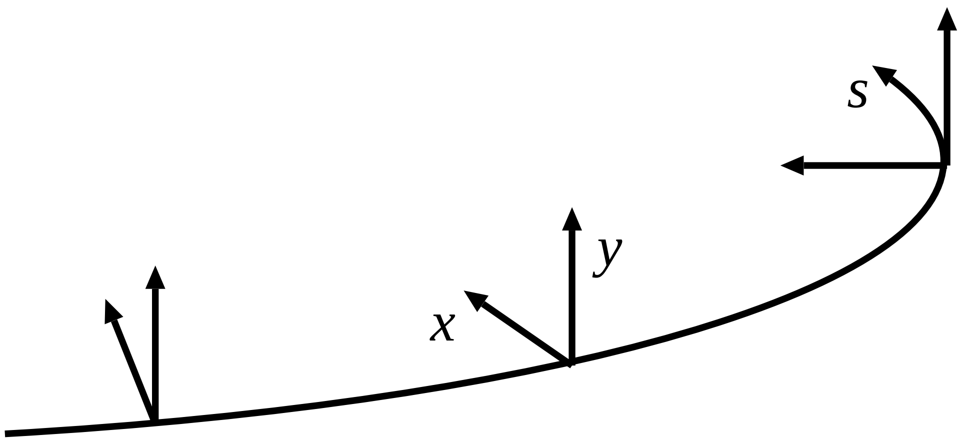


図 3.1　加速器における曲線座標系の定義．設計軌道の道程をあらわす変数 s をとり、各地点において軌道に対して直行した方向に x と y を定義する．

3.1.2 行列表示

ある地点 s_1 で位相空間の任意の場所に居た粒子が, 別の地点 s_2 に移動した場合に位相空間上でどこに移動したのかがわかれば、加速器の中の粒子の運動を理解したことになる。加速器中における粒子の運動は多くの場合線形であるので、粒子の運動を線形の枠内で取り扱うこととする。その場合、次のように行列により粒子の運動を記述できる. この行列を輸送行列 (transfer matrix) とよぶ. 例えば x, x' 位相空間における輸送行列は

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_1} \tag{3.3}$$

と表される. 各々のコンポーネントやセクションに対する輸送行列がわかれば、全体の輸送行列はその積で表される. 即ち

$$\boldsymbol{M} = \prod M_i \tag{3.4}$$

である.

3.1.3 ドリフト空間

例として、何もない空間における輸送行列を求めてみよう。このような空間を加速器ではドリフト空間 (drfit space) と呼ぶ. 何もない空間においては、粒子の運動量は変化しない. 一方、位置は運動量によって変化する. すなわち

$$x|_{s_2} = x + Lx'|_{s_1} \tag{3.5}$$

$$x'|_{s_2} = x'|_{s_1} \tag{3.6}$$

である. ここで L はドリフト空間の長さである. これを行列で表すと

$$\boldsymbol{M}_{drift} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

となる.

3.1.4 四重極磁石

すでに説明したが, 四重極磁場はビームに対する収束作用をもつ. 四重極磁場では, 中心軸では磁束密度がゼロであり、中心からの距離に比例して磁束密度が増大する. すなわち

$$B_y = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) x = gx \tag{3.8}$$

$$B_x = \left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\right) x = gy \tag{3.9}$$

である. この二つの関係は Maxwell 方程式の磁場の回転の式 $\nabla \times \boldsymbol{B} = 0$ のうち

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0, \tag{3.10}$$

と整合している。逆に言えば、x に比例する B_y が存在すると、もれなく y に比例した B_x がついてくるということだ。この磁場によるローレンツ力は

$$\frac{dp_x}{dt} = -qv_s B_y \sim \frac{qp}{m} B_y \tag{3.11}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = qv_s B_x \sim \frac{qp}{m} B_x \tag{3.12}$$

となる．変数を s に変換すると

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{d^2x'}{ds^2} = -\frac{qg}{p}x \tag{3.13}$$

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{d^2y'}{ds^2} = \frac{qg}{p}y \tag{3.14}$$

が得られる。これより、運動は x と y で独立であり、かつ四重極磁場では一方が収束作用を持つ場合は、他の自由度では発散作用となることがわかる．ここではたまたま x が収束作用を持つように見えるが, g は任意の実数なので $g<0$ なら y に収束作用を持つ．この方程式は二階の線形微分方程式で、よく知られたように係数の符号によって異なった解を持つ．$K \equiv qg/p$ とし、初期条件として $s=0$ で $x(0)$, $x'(0)$ をとると

- $K>0$ の場合,

$$x(s) = x(0)\cos\sqrt{K}s + \frac{x'(0)}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}s, \tag{3.15}$$

$$x'(s) = -\sqrt{K}x(0)\sin\sqrt{K}s + x'(0)\cos\sqrt{K}s, \tag{3.16}$$

- $K<0$ の場合,

$$x(s) = x(0)\cosh\sqrt{K}s + \frac{x'(0)}{\sqrt{K}}\sinh\sqrt{K}s, \tag{3.17}$$

$$x'(s) = -\sqrt{K}x(0)\sinh\sqrt{K}s + x'(0)\cosh\sqrt{K}s, \tag{3.18}$$

となり, $K<0$ で振動解、$K>0$ で発散解となる．微分方程式が線形であるから、解も線形重ね合わせが成り立つ．よってこの解を行列で書き表すことができる．磁極の長さを L として

- $K>0$ の場合,

$$\begin{pmatrix} \cos\sqrt{K}L & \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}L \\ -\sqrt{K}\sin\sqrt{K}L & \cos\sqrt{K}L \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

- $K<0$ の場合,

$$\begin{pmatrix} \cosh\sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}}\sinh\sqrt{K}s \\ -\sqrt{K}\sinh\sqrt{K}s & \cosh\sqrt{K}s, \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

　ここで求めた行列表示は線形力学の範囲で正確なものであるが、手計算を行うには多少ごちゃごちゃしていて見通しが良くない．そのためしばしば薄レンズ近似を適用する。KL を定数として, $L \to 0$ かつ $K \to \infty$ とすると,

$$-\sqrt{K}sin\sqrt{K}L \to -KL, \tag{3.21}$$

などに収束する．即ち行列は

- $K>0$ の場合,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

- $K<0$ の場合,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

となる．この行列の前後に $L/2$ の長さのドリフト空間を加えると薄レンズ近似による四重極の行列表現が求められる。

- $K > 0$ の場合,

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{2f} & L\left(1 - \frac{L}{4f}\right) \\ -\frac{1}{f} 0 & 1 - \frac{L}{2f} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

- $K < 0$ の場合,

$$M_D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{L}{2f} & L\left(1 + \frac{L}{4f}\right) \\ \frac{1}{f} 0 & 1 + \frac{L}{2f} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

薄レンズ近似のもとで、強収束の原理を検証してみよう．Focus と Defocus の二つの四重極が距離 D をへだてて置かれている．この時の輸送行列は

$$M_{FD} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{f_D} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_F} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{D}{f_F} & D \\ \frac{f_F - f_D - D}{f_F f_D} & 1 + \frac{D}{f_D} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

となる．ここで $f_F = f_D$ と置くと, M_{FD} の 21 成分は負となるので、全体として収束作用を持つ．この時、90 度異る軸の方向で F と D が入れ替わるが, その場合でも 21 成分は負となるので、極性の異る四重極をある距離へだてて置くことで二つの方向でともに収束作用を持たせることができる.

3.1.5 偏向磁石

加速器の軌道は偏向磁石によって制御される．偏向磁石とは軌道面に対して磁束密度が直交するような二重極の磁場を発生させる磁石である．よく知られたように磁束密度 B の中では粒子は回転運動をし、その半径 ρ は

$$\rho = \frac{p}{qB} \tag{3.27}$$

である．ここで p は粒子の運動量である．粒子の静止質量を m とすると、角周波数は

$$\omega = \frac{qB}{m} \tag{3.28}$$

である。ω をサイクロトロン周波数という。

偏向磁石において基準粒子は軌道を決めるので, そのような粒子の運動は加速器の曲線座標系の定義から $x = y = 0$ である．一方で、偏向磁石は x や x' がゼロではない粒子に対していくつかの理由から収束効果を持つ．従って粒子の運動を記述するさいはこれらの効果を取り込む必要がある.

Sector 型電磁石の収束作用

図 3.2 のような扇形をした偏向磁石について考える．このように基準粒子の軌道が磁極面に垂直になっている偏向磁石を Sector 型という．偏向角 θ をとり, $x(\theta), x'(\theta)$ にある粒子を考え, その粒子が角度にして $d\theta$ だけ進んだ時の位置を考える．二次の効果を無視すれば、x の変化は

$$x(\theta + d\theta) = x(\theta) + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \sim x(\theta) + x'(\theta)\rho d\theta, \tag{3.29}$$

となる．これは通常の自由空間のドリフトと一緒である．一方、x' は

$$x'(\theta + d\theta) = x'(\theta) + \frac{\partial x'}{\partial \theta} d\theta, \tag{3.30}$$

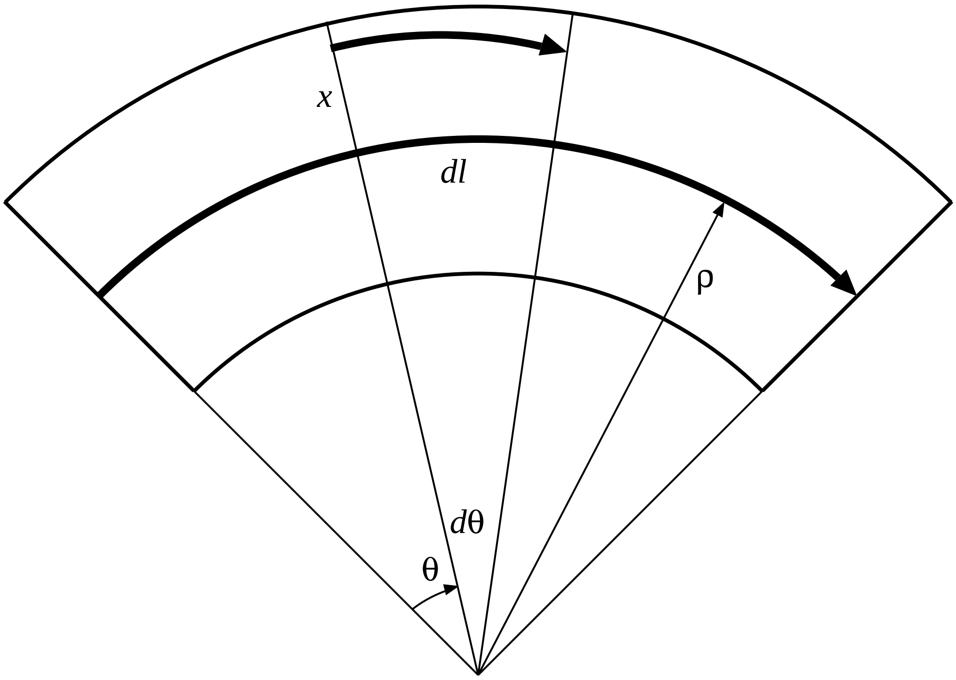


図 3.2　Sectore 型マグネット中の粒子軌道.

となるが、軌道長と回転半径との関係 $l = d\theta(\rho + x) = ds + dl$ より, 軌道長は $dl = d\theta x$ だけ, 基準軌道 ds よりも長くなる．この時、角度も余計に回ってしまい、その大きさは $dl/\rho = d\theta x/\rho$ である．これより

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta} = -\frac{x}{\rho} \tag{3.31}$$

となるので、これを代入して

$$x'(\theta + d\theta) = x'(\theta) - \frac{x(\theta)}{\rho} d\theta, \tag{3.32}$$

を得る．これらの二式より次の連立微分方程式が得られる．

$$\frac{dx}{d\theta} = \rho x' \tag{3.33}$$

$$\frac{dx'}{d\theta} = -\frac{x}{\rho}, \tag{3.34}$$

すなわち、

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + x = 0, \tag{3.35}$$

という単振動を表す二階の線形微分方程式が得られる。この解は

$$x(\theta) = x(0)\cos\theta + \rho x'(0)\sin\theta, \tag{3.36}$$

となる．x' は

$$x'(\theta) = -\frac{x(0)}{\rho}\sin\theta + x'(0)\cos\theta, \tag{3.37}$$

となる。これより、偏向角が θ_0 の偏向磁石の輸送行列は

$$M_H = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \rho\sin\theta_0 \\ -\frac{1}{\rho} & \sin\theta_0\cos\theta_0 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

となる．この行列は四重極磁石と類似しており, 12 成分が自由空間のドリフトによる成分, 21 成分が収束のを表す成分である．

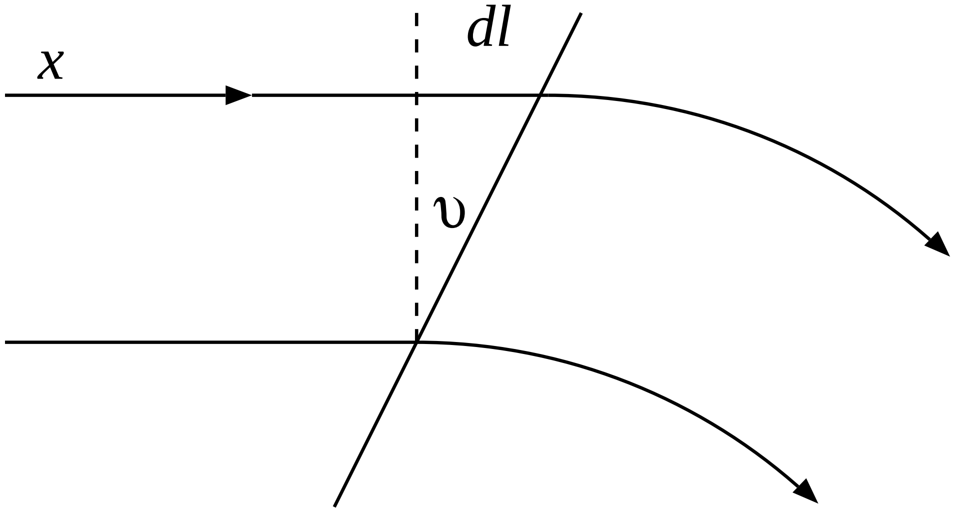


図 3.3　偏向磁石の端部による収束効果．基準軌道からすれた粒子は異る偏向角をうける．

端部収束の効果

基準軌道が磁極面に対して垂直以外の角度をもって入射した場合, 粒子は収束効果を受ける．これを端部収束 (Edge Focus) 呼ぶ．端部収束は x と y 各々の方向に働くが, その機構は異なっている。まず、x 方向について考えよう．図 3.3 に偏向磁石の端部を模式的に表す．粒子軌道に対して磁極が角度 υ だけ傾いている．基準軌道から x だけずれた粒子は磁極を走る距離が $dl = x \tan\upsilon$ だけ短くなるため, 偏向角が $d\theta = dl/\rho = \tan\upsilon/\rho x$ だけ減少する．基準軌道からみると x' が増えたように見えるから、効果としては発散 (Defocus) である．行列で表現すると

$$M_{In} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan\upsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

磁極から外にでる際には丁度逆の効果、すなわち収束効果をうける。行列で示すと

$$M_{Out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan\upsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

となる．

次に y 方向の効果についてかんがえる．偏向磁石の端部の磁束密度の様子を y 方向についてみると, 図**??**のように, 基準軌道からずれた場所では, y 方向の成分 B_y だけではなく, 基準粒子の軌道方向の成分 B_n が存在している．粒子が磁極面に対して垂直に入射する場合は B_n は軌道と平行なためローレンツ力は発生しないが, 角度を持って入射する場合は粒子軌道からみて垂直な成分をもつことになるので、ローレンツ力が発生する。この効果を見積もろう．対称性から $y = 0$ では $B_n = 0$ であるから, y が小さい領域では

$$B_n(s) = \frac{\partial B_n(s)}{\partial y} y \tag{3.41}$$

と書ける．B_n は磁極面に垂直であるから, 基準軌道に対して角度 υ だけ傾ているので、x 軸方向への射影成分 B_x は

$$B_x = -\frac{\partial B_n(s)}{\partial y} y \sin\upsilon \tag{3.42}$$

と求められる．粒子の B_x による偏向角は軌道にそって積分した値に比例する。

$$\int_{-\infty}^{0} B_x(s) ds = -y \sin\upsilon \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial B_n(s)}{\partial y} ds = -y \tan\upsilon \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial B_n(n)}{\partial y} dn \tag{3.43}$$

ここで Maxwell 方程式より

$$\frac{\partial B_n}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial n} = 0, \tag{3.44}$$

が成り立つので,

$$\int_{-\infty}^{0} B_x(s)ds = -y\tan\upsilon\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial B_y(n)}{\partial n}dn = -y\tan\upsilon B_y(0), \tag{3.45}$$

となる．ここで $B_y(-\infty) = 0$ としている．これより偏向角 η は

$$\eta = -\frac{qB_y(0)}{p}\tan\upsilon y, \tag{3.46}$$

となる．この効果を輸送行列で表すと

$$M_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan\upsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

となる．この行列表現は、端部による y 方向の偏向が端部で生じるという薄レンズ近似による表現である．

ここで例として長方形の磁極を持った偏向磁石の 行列表現を求めよう．図にその様子を示す．偏向角を θ とし、基準粒子の軌道が磁極に対して対称とすると (加速器の設計は大抵そのようにする), 磁極への入射角度は $\theta/2$ となる．入り口と出口で角度の大きさは同じであるが、その符号は反対である．端部磁場による x 方向への効果は、しかし入り口と出口で収束と発散の効果が逆転するため、このような磁極の場合, 両方とも発散となる．磁極内での収束効果を合わせて, x 方向の輸送行列は

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan(\theta/2)}{\rho} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{\rho} & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan(\theta/2)}{\rho} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho\sin\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.48}$$

となる。両端での発散の効果が磁極内の収束の効果と丁度打ち消しあい, 全体としてドリフト空間と同じとみなせる．一方, y 方向の輸送行列は

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan(\theta/2)}{\rho} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan(\theta/2)}{\rho} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\theta\tan\frac{\theta}{2} & \rho\theta \\ -\frac{\tan(\theta/2)}{\rho}\left(2-\theta\tan\frac{\theta}{2}\right) & 1-\theta\tan\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{3.49}$$

となる．一般的に $\theta \leq 1$ であるから, y 方向には収束作用が働く．

3.2　位相空間の輸送

これまで一つの粒子の加速器における輸送を行列により表現してきた．これをより一般的に表現するために, 空間全体の輸送というものについてかんがえよう．

3.2.1　Hill の方程式と輸送行列

これまで扱った線形力学におけるビームの輸送は全て

$$\frac{d^2w}{ds^2} + K(s)w = 0, \tag{3.50}$$

という形にかける．w は x あるいは y である．また $K(s)$ はビームラインの構成を表す s の関数で収束力が働く場所では正の値をとり, 発散力が働く場所では負の値ととる. この方程式を Hill の方程式という．この方程式の特殊解として, つぎのように二つの解を考えることができる．

$$C(0) = 1, C'(0) = 0, \tag{3.51}$$
$$S(0) = 0, S'(0) = 1, \tag{3.52}$$

これらの解を cos 型と sin 型と呼ぶ．これらの関数は Hill の方程式を満す．任意の粒子の輸送はこれらの関数の線形結合で表すことができる．すなわち

$$w(s) = w(0)C(s) + w'(0)S(s), \tag{3.53}$$
$$w'(s) = w(0)C'(s) + w'(0)S'(s), \tag{3.54}$$

である．これより, $w(s)$ についての輸送行列は

$$\begin{pmatrix} w(s) \\ w'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

と, これらの特殊解で記述できることがわかる．この輸送行列 $M(s)$ の行列式を求めると

$$det\ M(s) = C(s)S'(s) - S(s)C'(s) \tag{3.56}$$

となるが、これを s について微分する。$C(s)$ と $S(s)$ は Hill の方程式を満すから

$$\frac{d}{ds} det\ M(s) = C(s)\frac{d^2S(s)}{ds^2} - S(s)\frac{d^2C(s)}{ds^2} = 0, \tag{3.57}$$

となる。すなわち, $M(s)$ の行列式は s について定数である． $s = 0$ の値から $det\ M(0) = 1$ であるから, 結局 $det\ M(s) = 1$ と行列式はどんな輸送行列でも 1 である．

この意味を考えるために、位相空間全体が $M(s)$ によってどのような変換をうけるかを考えよう．位相空間とは w, w' の二つの変数で表される空間のことで, 粒子の状態は位相空間上の点の位置で表される．この位相空間上の楕円は一般的に次のように二次形式で表現できます。

$$\begin{pmatrix} w & w' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} = 1 \tag{3.58}$$

ただし $ab - h^2 > 0$ である．このとき, 楕円の面積は $\sqrt{ab - h^2}\pi$ である。ちなみに負の場合は双曲線となる．これが $M(s)$ によって輸送されると、

$$\boldsymbol{w(0)} = M^{-1}(s)\boldsymbol{w(s)} \tag{3.59}$$

を代入して

$$\begin{pmatrix} w & w' \end{pmatrix} \left[M(s)^{-1}\right]^T \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} M(s)^{-1} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} = 1 \tag{3.60}$$

へと移される．$det\ M(s) = det\ M(s)^{-1} = 1$ であるので,

$$det \left[\left[M(s)^{-1}\right]^T \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} M(s)^{-1}\right] = det \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}, \tag{3.61}$$

である．すなわち、輸送によって楕円の面積は変わらない．このことから, 位相空間上にある任意の図形の面積は、輸送行列による変換でその面積は不変であることが結論できる．

位相空間において粒子の集まりが占める面積のことをエミッタンス (emittance) と呼ぶ．エミッタンスは次節でみるようにビームの性質をきめる基本的な指標であり, ビームの輸送における不変量となっている．

3.2.2　Twiss パラメーターによる表現

Hill の方程式 (3.50) は加速器における粒子の横方向の運動を記述する．収束を表す関数 $K(s)$ は区間毎に異る値をとるので, その区間毎に輸送行列を求めることで、粒子の運動を表現してきた．また, 粒子輸送によって位相空間の面積が不変量となっていることを示した．しかしこれではある特定のビーム輸送ラインの性質についての見通しが良くない．それを分かり易く示すのが Twiss パラメーターによる表現である．Twiss パラメーターが具体的にどのようなものなのかを説明する前に, Hill の方程式から先ず Twiss パラメーターを求めてみよう．

Hill の方程式 (3.50) において $K(s)$ が定数である場合の特殊解は

$$w(s) = A\cos(\sqrt{K}s + \phi), \tag{3.62}$$

である．この類推から, 次のように定数を s の関数で置き換えた解について検討してみよう．

$$w(s) = A\sqrt{\beta(s)}\cos[\psi(s) + \phi]. \tag{3.63}$$

この式を式 (3.50) に代入すると,

$$A\left[\sqrt{\beta}'' - \sqrt{\beta}(\psi')^2 + K\sqrt{\beta}\right]\cos(\psi + \phi) - A\left[2\sqrt{\beta}'\psi' + \sqrt{\beta}\psi''\right]\sin(\psi + \phi) = 0, \tag{3.64}$$

をえる．これは cos および sin についての恒等式であるので、次の二式が成り立つ．

$$2\sqrt{\beta}'\psi' + \sqrt{\beta}\psi'' = 0 \tag{3.65}$$

$$\sqrt{\beta}'' - \sqrt{\beta}(\psi')^2 + K\sqrt{\beta} = 0. \tag{3.66}$$

式 (3.65 から次式が成り立つことがわかる .

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{\beta}^2\psi') = 0, \tag{3.67}$$

この両辺を積分して, 積分定数を 1 と置くと

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')}, \tag{3.68}$$

を得る．すなわち, $\beta(s)$ と $\psi(s)$ は独立ではない．これを式 (3.63) に代入すると

$$\sqrt{\beta}'' + K(s)\sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}^3} = 0, \tag{3.69}$$

を得る．原理的には上式を用いて $\beta(s)$ を求めることができるが、解析的には困難であり, かつ見通しも良くない．先を急ぐ前に、Twiss パラメーターの意味について考えてみよう．

式 (3.63) を s について微分すると

$$w(s)' = \frac{A}{\sqrt{\beta}}\left[\alpha\cos(\psi + \phi) + \sin(\psi + \phi)\right], \tag{3.70}$$

をえる。ただし

$$\alpha(s) \equiv -\frac{\beta'}{2}, \tag{3.71}$$

である。式 (3.63) および (3.70) から位相成分を消去すると

$$\gamma w^2 + 2\alpha w w' + \beta w'^2 = \epsilon, \tag{3.72}$$

をえる。但し

$$\gamma \equiv \frac{1}{\beta}(1 + \alpha^2), \tag{3.73}$$

$$\epsilon \equiv A^2. \tag{3.74}$$

この式は (w, w') 平面における楕円を表している．この α, β, γ を Twiss パラメーターと呼ぶ．ローレンツ因子を同じであり混同しやすいが、ビーム力学の分野で定着している用語であり、いかんともし難い。

Twiss パラメーターはすでに見たようにビームの輸送にしたがって変化していく量である．それに従い、楕円の具体的な形状も変化していくが, 輸送行列の行列式が 1 であることからその楕円の面積は不変である．ϵ は Courant-Snyder 不変量と呼ばれる量で, やはりビーム輸送において不変量である．式 (3.72) で表される楕円の形状を図 3.4 に

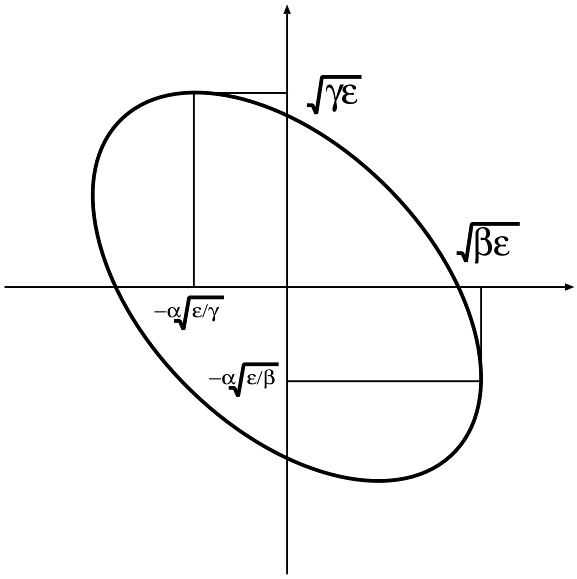


図 3.4　Twiss parameter により表現される楕円.

示す。すなわち、w の最大値が $\sqrt{\beta\epsilon}$ であり w' の最大値が $\sqrt{\gamma\epsilon}$ である.ϵ は不変量であり粒子や粒子分布の初期状態により決まるものである．そのような粒子や粒子分布が輸送された時に, ある場所でどのような分布をするのかを表すのが Twiss パラメーターであることがわかる．即ち、Twiss パラメーターが s の関数として求められればビームがどのように輸送されるのかを把握することができる.

Twiss パラメーターの変化を輸送行列を用いて記述することができる．輸送行列の行列式は 1 であるから, 逆行列は

$$M^{-1}(s) = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

となる．$\boldsymbol{w(0)} = \boldsymbol{M}^{-1}(s)\boldsymbol{w(s)}$ を式 (3.72) に代入し、元の式と比較することで Twiss パラメーターの輸送を求めることができる．その式は

$$\begin{pmatrix} \beta(s) \\ \alpha(s) \\ \gamma(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & 1+2m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{22}m_{21} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(0) \\ \alpha(0) \\ \gamma(0) \end{pmatrix} \tag{3.76}$$

となる.

式 (3.76) を用いて, 具体的にビームサイズ等がどのように変化するのかを見ることができる．ドリフト空間では

$$\beta(s) = \beta_0 - 2\alpha_0 s + \gamma_0 s^2 \tag{3.77}$$

$$\alpha(s) = \alpha_0 - \gamma_0 s \tag{3.78}$$

$$\gamma(s) = \gamma_0, \tag{3.79}$$

である。具体的な変化は行列要素のみならず、Twiss パラメーターの初期値にもよることがわかる.

四重極磁石の前後では

$$\beta_1 = \beta_0 \tag{3.80}$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\beta_0}{f} \tag{3.81}$$

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \frac{2\alpha_0}{f} + \frac{\beta_0}{f^2}, \tag{3.82}$$

のように変化する。図 3.5 に β 関数の変化の例を示す。縦軸が β (単位は m) で, s=3 (m) と 6(m) に極性の異る四重極が置かれている。点線と実線が各々 β_x と β_y を表している。s=0 の初期値は α はいずれもゼロとしているの

で、s=3(m) まではドリフトにより β は徐々に増大する．s=3(m) での四重極で x には発散、y には収束効果が働き,s=6(m) の四重極では逆の作用が働いている．実際のビームサイズは

$$\sigma = \sqrt{\epsilon\beta}, \tag{3.83}$$

のように、求められるので, ベータ関数とエミッタンスによりビームの振る舞いが理解できる．

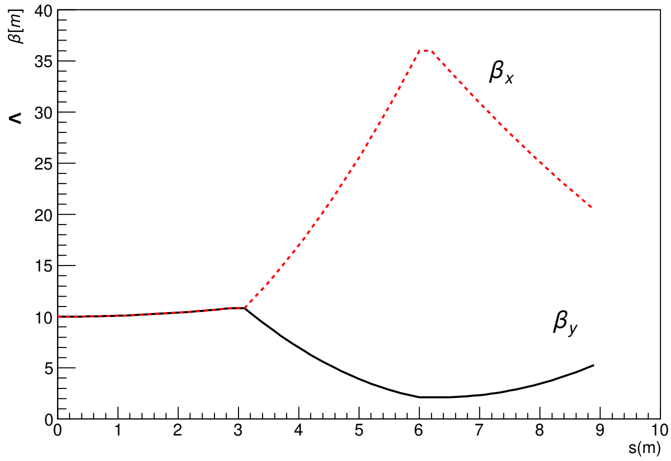


図 3.5　β 関数の例．$\alpha = 0$ を初期条件として s=3 と 6(m) の箇所に極性が逆となる四重極磁石を配置している．

3.2.3　分散

加速器における分散 (dispersion) とは、運動量の摂動による軌道の変化のことである．

$$\Delta w = D\frac{\Delta p}{p}, \tag{3.84}$$

ここで Δw は Δx あるいは Δy であり, 軌道のずれ, また p Δp は基準粒子の全運動量と、特定の粒子のそこからのずれである．例えば、偏向磁石内での粒子の軌道半径は運動量によって変化するから、運動量が異る粒子は基準軌道からずれた場所を通過する．それを表すパラメーターが分散である．

ここでは図 3.2 に示されている Sector 型磁石を例にとり, 分散の導出と定式化を行う。式 (3.30) を次のように変更する．

$$x'(\theta + d\theta) = x'(\theta) + \frac{\partial x'}{\partial \theta}d\theta + \frac{dp}{p}d\theta, \tag{3.85}$$

これを微分方程式に直し

$$\frac{dx'}{d\theta} = -\frac{1}{\rho}x + \frac{\Delta p}{p}, \tag{3.86}$$

を得る。式 (3.34) とこの式から

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x - \frac{\Delta p}{p}\rho = 0, \tag{3.87}$$

を得る．

$$t \equiv x - \rho\frac{\Delta p}{p}, \tag{3.88}$$

と定義すると、式 (3.87) は

$$\frac{d^2t}{d\theta^2} + t = 0, \tag{3.89}$$

となるので、解は次のようになる.

$$x(\theta) = x(0)\cos\theta + x'(0)\rho\sin\theta + \rho(1-\cos\theta)\frac{\Delta p}{p}, \tag{3.90}$$

$$x'(\theta) = -\frac{1}{\rho}x(0)\sin\theta + x'(0)\cos\theta + \sin\theta\frac{\Delta p}{p}, \tag{3.91}$$

これを $(x, x', \Delta p/p)$ という 3×3 の行列式で書くことができる．この行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta & \rho(1-\cos\theta) \\ -\frac{1}{\rho}\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.92}$$

と書くことができる．これを分散を含んだ輸送行列と呼ぶ.

分散関数 η および η' を次のように定義する.

$$\eta \equiv \Delta w\left(\frac{\Delta p}{p}\right) \tag{3.93}$$

$$\eta' \equiv \Delta w'\left(\frac{\Delta p}{p}\right) \tag{3.94}$$

ここで Δw は分散により生じる軌道のずれである．粒子の位置はもともとの粒子位置 w_o と分散由来のものがあるので実際の粒子の座標はその和である.

$$w = w_o + \Delta w \tag{3.95}$$

この w に対する輸送は、分散を含んだ輸送行列により

$$\boldsymbol{w(s_2)} = M(s)\boldsymbol{w(s_1)} \tag{3.96}$$

と表される。行列による表記はすべて線形足し合せが成り立つので

$$\boldsymbol{w_o(s_2)} = M(s)\boldsymbol{w_o(s_1)}, \tag{3.97}$$

$$\boldsymbol{\Delta w(s_2)} = M(s)\boldsymbol{\Delta w(s_1)}, \tag{3.98}$$

と、各々の軌道成分について輸送されることがわかる．Δw についての輸送行列全体を $\Delta p/p$ で割ると分散関数の輸送が得られる．分散ベクトルを

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.99}$$

と定義すると, 分散ベクトルもおなじ輸送行列により輸送される.

$$\boldsymbol{\eta(s_2)} = M(s)\boldsymbol{\eta(s_1)}, \tag{3.100}$$

この表記からもわかるように, 分散ベクトルもその初期値に依存して変化することがわかる．最初に $\eta = \eta' = 0$ の状態を考え, そこに運動量のずれ Δp がなんらかの原因で発生したとする．そこからどのように有限の分散が発生するか考えよう．この状態で偏向磁石に入射すると η はあまり大きくならないが, η'、すなわち角度の分散が発生する。これは運動量のずれにより偏向角にもずれが生じることに相当する．この状態でドリフト空間を粒子が走ると η' が η へと伝搬することで軌道のずれ、すなわち η が発生する.

3.3　縦方向位相空間の輸送とバンチング

縦方向位相空間のは次のように定義される.

$$\begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - s_0 \\ \frac{E-E_0}{E_0} \end{pmatrix}, \tag{3.101}$$

として定義する．ここで s_0, E_0 などは基準粒子の s 方向の位置とエネルギーである。以上のように定義された空間における粒子の輸送は、横方向位相空間と同様に線形近似のもとで

$$\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{r_1}, \tag{3.102}$$

と行列で表示できる．ここで $\boldsymbol{r_i}$ は二次元ベクトル、$\boldsymbol{M}$ は 2×2 行列である。この行列はビーム輸送行列とよばれ、設計により決まるものである。

高エネルギー加速器の多くは前節で説明したように RF による加速をもちいている。ビーム全体を均一に加速するためには、電子ビームは時間的に RF の周期に対して充分短い時間に局在している必要がある。これを Bunched Beam (ビームのかたまり) と呼び、ビームを Bunched Beam にする操作をバンチング (bunching) という。またバンチ長を圧縮する操作もバンチングと呼ぶ。

バンチングをおこなうためには、バンチの長手方向位置 (z) に対して、何らかの変調をかけ、ビーム内に相対運動を生じさせる必要がある。通常は z に依存したエネルギー変調を用いる。速度 β が光速に比べて充分小さい領域では、速度 β はエネルギー変調により変化するので、ビームにエネルギー変調をかけることで相対運動を生じさせることができる。これを速度バンチング (Velocity bunching) という。それにたいして、β が光速に近い領域では速度変調が生じないので、速度バンチングを用いることはできない。それに代る方法として、magnetic bunching がある。この方法ではエネルギー変調をかけた後、dispersion(粒子のエネルギーにより生じる行路差) を有する経路を通過させることで、ビーム内に相対運動を生じさせる。以上のように粒子のエネルギーにより異なる方法が用いられる。ここでは進行方向のビーム輸送の一般論を論じた後、バンチングについて論ずる。

s_0 から s_1 までのビーム輸送を考える。この時、基準粒子 (β, γ) がたどる道のりを L とする。必要な時間 t は

$$t = \frac{L}{\beta c}, \tag{3.103}$$

である。基準粒子からエネルギーが $\delta \equiv \Delta\gamma/\gamma$ だけずれた粒子では、この時間 t の間に基準粒子に対して

$$\Delta z_{vel} = tc\left(\frac{\partial \beta}{\partial \gamma}\delta\gamma\right) = \frac{L}{\gamma^2\beta^2}\delta, \tag{3.104}$$

だけずれが生じる。ここで粒子の運動を基準粒子とともに移動する座標系でみる。すなわち基準粒子を $z = 0$ として、バンチ内での進行方向の相対位置を z であらわすことにする。、$s = s_0$ において基準粒子に対して $z = z_0$ にあった粒子が δ の変調を受けたとすると、$s = s_1 (= L)$ では

$$z_1 = z_0 + \frac{L}{\beta^2\gamma^2}\delta, \tag{3.105}$$

に移動する。すなわち、エネルギーの大きい粒子は速度が大きいので、同じ時間内により遠くまで移動し、バンチ内での相対位置でみると前方に移動することを表している。

速度差以外にも粒子の進行方向位置を変化させるものが dispersion である。単純な周回軌道の場合、エネルギーの大きい粒子は軌道半径が大きくなり、一定のセクションを通過する場合でも大回りをすることで長い距離を走ることになるのである。基準粒子に対するこの道のりの差だけ進行方向に実質的に粒子は移動する。この距離は

$$\Delta z_{dis} = -\int \frac{\eta}{\rho} ds\delta, \tag{3.106}$$

と表される。以上ふたつの効果をまとめると、エネルギ－変調 δ により生じる粒子の進行方向の移動量は

$$\delta z = \left(L\frac{1}{\beta^2\gamma^2} - \int \frac{\eta}{\rho} ds\right)\delta, \tag{3.107}$$

右辺第一項が速度変調による寄与で、第二項が dispersion による寄与である。エネルギーが高くなると、第一項の寄与は $1/\gamma^2$ で減少するが、第二項の寄与は軌道半径が変わらなければ変化しないので、相対的なエネルギー変調幅が変わらなければ効果は変わらない。つまり速度変調による方法がエネルギーが低い領域でしか有効でないのに対して、dispersion による効果はエネルギーに依存しないことがわかる。

問題 2-4 式 (3.104) を導け。

問題 2-5 式 (3.106) を導け。

進行方向の Beam 輸送行列

ここで進行方向のビーム輸送行列を導こう.$\delta \equiv \delta\gamma/\gamma$ として、長手方向の位相空間 (z, δ) における $s = s_0$ から $s = s_1$ までの輸送行列は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{55} & R_{56} \\ R_{65} & R_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix}, \tag{3.108}$$

と書ける。R_{55} などは行列要素であり、加速空洞やビーム輸送ラインなど、各々のコンポーネントにおいて異なる値をとる。重要なことは M_i などの行列で表される複数のビーム輸送コンポーネントが並んでいる場合、その全体のビーム輸送は、容易に予想できるように

$$\mathcal{M}_{total} = \mathcal{M}_i \mathcal{M}_{i-1} \ldots \mathcal{M}_1, \tag{3.109}$$

と行列の積で表されることである。従ってビーム輸送について知りたい時は各々個別のコンポーネントについて行列要素を求めるだけでよい。全体の輸送行列は（計算は複雑かもしれないが）行列の単なる積で求めることができる。

Velocity Bunching

式 (3.105) によると、エネルギー変調をうけた粒子が長さ L の区間を通過した後の、基準粒子に対する長手方向の位置は

$$z_1 = z_0 + \frac{L}{\beta^2\gamma^2}\delta, \tag{3.110}$$

と表される。ここで δ はこの輸送の過程では変わらないとしている。これを行列形式に書き直すと、

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{\beta^2\gamma^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} \tag{3.111}$$

となる。注目すべきは対角成分はすべて 1 であり、非対角成分は R_{56} のみ値を持つということである。こと縦方向の運動に関する限り、この R_{56} 成分が重要であり、運動を決めている。これがエネルギー変調がある場合のドリフトによる縦方向の運動を表す輸送行列である。

順序が逆になったが、振幅が次のように表される RF 加速空洞を考えよう。

$$V = V_0 \sin \omega t, \tag{3.112}$$

ここで加速空洞の長さは無限小として、空洞を通過する粒子をその通過時点での振幅により決まる加減速をうけるものとする。すなわち、空洞を通過するのに必要な時間は無視することとし、その間の位相の変化はないものとみなす。また、基準粒子が $t = 0$ で空洞を通過するものとしよう。すると、基準粒子に対して $z = z_0$ にある粒子の加減速は、$t = -z_0/(\beta c)$ での位相で行われるので

$$\delta E = eV_0 \sin\left(-\frac{\omega z}{\beta c}\right), \tag{3.113}$$

とおける。位相が小さいとして展開すると、

$$\delta E = -\frac{eV_0\omega}{\beta c} z, \tag{3.114}$$

となる。すなわち z の一次に比例したエネルギー変調をうけることになる。エネルギー広がりを示す δ はこの変調により

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{eV_0\omega}{E\beta c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} \tag{3.115}$$

のように変化する。この場合の行列要素は、対角成分が 1 であるのはドリフトと同様であるが、非対角成分 R_{65} がゼロでない、ということである。すなわち加速空洞に関しては R_{65} 成分が重要なパラメーターである。

Velocity bunching においては、加速空洞により z に依存したエネルギー変調をかけ、そのビームをドリフトさせることによりバンチ圧縮をおこなう。これを行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R_{65} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + R_{56}R_{65} & R_{56} \\ R_{65} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix}, \tag{3.116}$$

となる。この時、初期状態として (z, δ) 空間に相関が無いと仮定すると、輸送後の z_2 の値を最小化する条件は

$$1 + R_{56}R_{65}R_{56} = 0, \tag{3.117}$$

である。ここに式 (3.115)(3.117) で示されている R_{56} と R_{65} を代入すると、

$$1 - \frac{L}{\beta^2\gamma^2}\frac{eV_0\omega}{E\beta c} = 0, \tag{3.118}$$

となる。これがバンチングのための条件となる。

Magnetic Bunching

Magnetic bunching の場合、Velocity bunching の時に単純なドリフトスペースが果たした役割を dispersion が担うことになる。dispersion は偏向磁石やシケイン、ウイグラー磁石など、エネルギーの異なる粒子が異なる経路を通るようなセクションで発生する。通常は dispersion というと横方向の dispersion であり、粒子進行方向に垂直かつ軌道面に含まれる方向に対して、エネルギーの異なる粒子は基準粒子に対して

$$\Delta x = \eta\frac{\Delta p}{p}, \tag{3.119}$$

だけずれた軌道を通る。ここで η が dispersion であり、δp および p は粒子の運動量のずれおよび基準粒子の運動量である。この時、粒子が軌道半径 ρ の回転軌道にあるとき、進行方向 s について道のりの差が発生する。その大きさはセクションの長さを L とすると、

$$\Delta L = \frac{\eta L}{\rho}\frac{\Delta p}{p}, \tag{3.120}$$

となる。相対論的な領域では $\delta \equiv \Delta\gamma/\gamma \sim \Delta p/p$ であるから、

$$\Delta L = \frac{\eta L}{\rho}\delta, \tag{3.121}$$

となる。この値が行列要素 R_{56} となる。それ以外は Velocity bunching の時とまったく同一の枠組で考えることができる。すなわちバンチングの条件は式 (3.115) で与えれる。具体的に書き下すと、

$$1 - \frac{\eta L}{\rho}\frac{eV_0\omega}{E\beta c} = 0, \tag{3.122}$$

となる。

問題 2-6　式 (3.118) を導け。

問題 2-7　式 (3.122) を導け。

問題 2-8　Velocity bunching と Magnetic bunching の特性の違いを述べよ．またその特性の違いを式 3.118 および 3.122 を用いて説明せよ．

3.4 Spin manipulation

量子力学においては、スピンは粒子に固有の磁気モーメントである。電子の場合、スピンの大きさは $\hbar/2$ であり、スピン量子化軸に対して、全ての電子は $+\hbar/2$ あるいは $-\hbar/2$ どちらかの状態をとる。多数の電子を考えた時、ある量子化軸に対して各々 $+\hbar/2$ あるいは $-\hbar/2$ の状態にある電子数を N_+ および N_- とすると、偏極度 P は

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}, \tag{3.123}$$

と定義される。すなわち全ての電子が量子化軸と平行なスピンを持つ状態を偏極度 1.0 (100%)、反平行な場合を -1.0 (-100%) とする。偏極に偏りがない状態、すなわち半数の電子スピンが平行、残りの電子が反平行な場合、偏極度はゼロとなる。

電子ビームに限らず、スピンは粒子に固有の磁気モーメントであり、電磁場との相互作用によりその向きが変化する。量子力学的には量子化軸を決めてしまえばスピンは量子化されているので、離散量しかとれない。従って電磁場との相互作用において変化するのは量子化軸であり、スピンそのものではない。また偏極度は保存されるので、量子化軸の方向を持ち、偏極度の大きさをもつベクトルを偏極ベクトル (Polarization Vecotr) とすると、都合がよい。偏極ベクトル $\boldsymbol{P}$ の運動は次のような Thomas-BMT equation により記述される。

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{\Omega_0} \times \boldsymbol{P}, \tag{3.124}$$

ここで $\boldsymbol{\Omega_0}$ は電磁場により定義されるベクトルであり、

$$\boldsymbol{\Omega_0} = -\frac{Ze}{m\gamma}\left[(1+G\gamma)\,\boldsymbol{B}_\perp + (1+G)\,\boldsymbol{B}_\parallel + \left(G\gamma + \frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\beta}}{c}\right], \tag{3.125}$$

である。G は異常磁気能率 (anomarous magnetic moment) であり、磁気能率比 (gyro-magnetic ratio)g によって次のように表される。

$$G = \frac{g-2}{2}. \tag{3.126}$$

電子の場合の異常磁気能率は 0.00116 である。電磁場による加速が無い場合、速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の運動は次のように記述される。

$$\frac{\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\Omega_c} \times \boldsymbol{\beta}, \tag{3.127}$$

ここで Ω_c は電磁場により次のように記述される。

$$\boldsymbol{\Omega_c} = -\frac{Ze}{m\gamma}(\boldsymbol{B}_\perp) + \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\beta}}{c}. \tag{3.128}$$

式 (3.124) は実験室系における偏極ベクトル $\boldsymbol{P}$ の運動を表している。また式 (3.127) は速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の運動を表している。両者の差をとることにより、$\boldsymbol{\beta}$ を基準（量子化軸）とした偏極ベクトルの運動を表すことができる。これを $\boldsymbol{P_\beta}$ と表示すると、

$$\frac{d\boldsymbol{P_\beta}}{dt} = bvec\Omega \times \boldsymbol{P_\beta}, \tag{3.129}$$

ここで Ω は

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{Ze}{m\gamma}\left[G\gamma\boldsymbol{B}_\perp + (1+G)\,\boldsymbol{B}_\parallel + \left(G\gamma - \frac{\gamma}{\gamma^2-1}\right)\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\beta}}{c}\right], \tag{3.130}$$

である。すなわち粒子の進行方向を基準として偏極ベクトルの運動は式 (3.129, 3.130) により記述される。容易にわかるように、偏極ベクトルは磁場、あるいは進行方向に対する横電場成分により歳差運動を行う。

Spin Rotation in Solenoid Magnet

まず、磁場が粒子の進行方向に対して平行な場合を考えよう。これは調度ソレノイド磁場内での運動に相当し、次のような方程式で記述される。

$$\frac{d\boldsymbol{P_\beta}}{dt} = -\frac{Ze}{m\gamma}\left(1+G\right)\boldsymbol{B}_{\parallel}\times\boldsymbol{P_\beta}. \tag{3.131}$$

角運動量の変位方向は常に偏極ベクトルおよび磁場ベクトルと垂直だから、角度 θ は不変であり、回転は磁場 $\boldsymbol{B}_{\parallel}$ および $\boldsymbol{\beta}$ のまわりに生じる。$\boldsymbol{B}_{\parallel}$ と偏極ベクトルのなす角を θ とすると、歳差運動の回転角 ϕ は

$$\phi \equiv \int \frac{1}{P_\beta}\left|\frac{\boldsymbol{P_\beta}}{dt}\right| dt = \int \frac{1}{P_\beta}\left|\frac{\boldsymbol{P_\beta}}{dt}\right| \frac{1}{\beta c} ds, \tag{3.132}$$

となる。あらわに書き下すと、

$$\phi = -\frac{Ze}{m\gamma\beta c}(1+G)\sin\theta \int B_{\parallel} ds, \tag{3.133}$$

となる。すなわち回転角の大きさは磁場の軌道に沿った積分値 (Tm) および $\sin\theta$ に比例する。これより、$\boldsymbol{B}_{\parallel}$ により偏極ベクトルを回転させる場合、最も効率的に回転が生じるのは磁場に対して偏極ベクトルの方向が直角になっている場合である。

偏極ベクトルと磁場が直角で、かつ磁場がある区間 L で一定の値をとる場合、偏極ベクトルの回転角度は

$$\phi = -\frac{Ze}{m\gamma\beta c}(1+G)B_{\parallel}L \tag{3.134}$$

と記述される。

3.4.1 Spin Rotation in Bending Magnet

粒子の進行方向に対して垂直な磁場 $\boldsymbol{B}_{\perp}$ の場合の偏極ベクトルの運動を考えよう。この場合、偏極ベクトルとともに、粒子の運動方向も磁場により変化する。例えば、実験室系からみれば、周回軌道を回転する粒子は、一周ごとにその進行方向を 2π 変化させるが、およそ等しい回転速度で偏極ベクトルも回転する。しかしその回転速度はずれており、我々はそのずれがどの程度なのかに興味がある。

そこで粒子の運動方向を基準とした系からみた偏極ベクトルの運動を調べよう。そのためには式 (3.129, 3.130) において、$\boldsymbol{B}_{\perp}$ 以外の電磁場の成分をゼロと置く。すると次式を得る。

$$\frac{d\boldsymbol{P_\beta}}{dt} = -\frac{Ze}{m}G\boldsymbol{B}_{\perp}\times\boldsymbol{P_\beta}. \tag{3.135}$$

磁場と偏極ベクトルがなす角度を θ とすると、式 (3.140) から偏極ベクトルの回転角度 ϕ は

$$\phi = -\frac{Ze}{m\beta c}G\sin\theta \int B_{\perp} ds, \tag{3.136}$$

となる。回転角が最大となるのはやはり偏極ベクトルと磁場が垂直な場合である。そのような場合で、かつ磁場が区間 L で一定の場合、回転角は次のように表される。

$$\phi = -\frac{Ze}{m\beta c}GB_{\perp}L, \tag{3.137}$$

偏極ベクトルの回転角は磁場の積分値に比例する。

3.4.2 Spin Manipulation

偏極ベクトルの回転はスピン、ビームという多粒子系における偏極度の保存にとって重要である。なぜなら無偏極ビームには方向性はなく、仮りに個々の粒子のスピン回転を考えたとしても、全体としてはどのような回転などの操作を行っても無偏極であり、方向性がないことに変わりはない。問題となるのは、偏極したビームがあった場合、減偏極（偏極度が減少する効果）せずに、それをどのように意図したように操作するのかということである。

まず減偏極について考察しよう。減偏極の原因となるのはビームのエネルギー広がりである。ビームというの多粒子系であるので、ビームのエネルギーはある中心のまわりに有限の広がりを持っている。偏極ベクトルの回転角は式 (3.139) あるいは (3.142) で示されているように磁場のみならず γ や β など個々の粒子のエネルギーや速度に依存する。すなわちビームに含まれる粒子がエネルギー広がりをもっていると、偏極ベクトルの回転角度も広がりをもち、最初は個々の粒子でそろっていた偏極方向がずれてくる。これを減偏極といい、偏極度を減少させる効果をもつ。

電子の蓄積リングなどに長時間ビームを回し続けることを考えよう。最初偏極ベクトルがビームの進行方向に対して平行であった場合、式 (3.142) で示されているように偏極ベクトルはビームの進行方向に対して回転をはじめる。回転軸は磁場方向、すなわち鉛直方向である。式 (3.142) には β が含まれているので、ビームが γ においてエネルギー広がり $\Delta\gamma$ を有している場合、生じる偏極ベクトルの角度広がり（ばらけ具合）は、

$$\Delta\phi = \frac{eG}{m\gamma^3\beta^3 c} nBL\Delta\gamma, \tag{3.138}$$

となる。ここで n は周回数、BL は一周あたりの磁場の積分値である。このように偏極ベクトルの広がりは周回数にしたがって増加し、π になると、ほぼ等方的となり、偏極度がゼロとなるから、偏極ベクトルは意味をなさなくなる。

このような減偏極の効果を抑制するには、磁場に対して偏極ベクトルを平行にしてやることである。式 (3.141) に示されているように、偏極ベクトルの回転速度は磁場と偏極ベクトルのなす角の正弦 $\sin\theta$ に依存するので、平行ならば偏極ベクトルの回転速度はゼロとなり、減偏極も生じない。そのため、例えば電子蓄積リングへの入射時にはスピンはビーム周回軌道に対して鉛直方向、すなわち偏向磁場と平行な方向にしてやればよい。このように減偏極を抑制するには偏極ベクトル方向を特定の方向を向くように操作してやる必要がある。

また電子陽電子コライダーのような物理実験においては、衝突現象を生じさせるさい、偏極度および偏極方向が初期状態を決める重要なパラメーターのひとつとなる。そのため、衝突点において任意の偏極状態を作れるように、偏極ベクトルの方向をやはり操作してやる必要がある。

以上のように、減偏極の抑制と物理実験上の必要性から、偏極ベクトルの方向を操作してやる必要が生じる。偏極ベクトルの回転などの操作を意図したビーム輸送ラインをスピンローテーター (Spin rotator) という。Spin rotator にはソレノイド磁場を用いたもの、偏向磁場を用いたもの、また電場と磁場の組み合わせによるもの（Wien Filter) などがある。偏向磁場を用いた Spin rotator は偏極ベクトルとともに粒子軌道も変化させてしまうため実用上制限が大いが、Spin manipulation を理解するため、ここではソレノイド磁場と偏向磁場を仮定しよう。

原理的に三つのソレノイド磁場と偏向磁場によるスピンローテーターを用意することで、任意の方向を向いた偏極ベクトルを、任意の方向に回転させることができる。二つでも充分であるように見えるが、最初の偏極ベクトルの方向が磁場と平行な場合、スピンローテーターのうちのひとつは偏極ベクトル回転にまったく使用できないことになり、実質的にひとつのスピンローテーターしか使えないことになる。初期状態として任意の方向を仮定すると必要なスピンローテーターは三つとなるのである。

偏極ベクトルの回転角度は

$$\phi = -\frac{Ze}{m\gamma\beta c}(1+G)B_{\parallel}L \tag{3.139}$$

と記述される。

3.4.3 Spin Rotation in Bending Magnet

粒子の進行方向に対して垂直な磁場 $\boldsymbol{B}_\perp$ の場合の偏極ベクトルの運動を考えよう。この場合、偏極ベクトルとともに、粒子の運動方向も磁場により変化する。例えば、実験室系からみれば、周回軌道を回転する粒子は、一周ごとにその進行方向を 2π 変化させるが、およそ等しい回転速度で偏極ベクトルも回転する。しかしその回転速度はずれており、我々はそのずれがどの程度なのかに興味がある。

そこで粒子の運動方向を基準とした系からみた偏極ベクトルの運動を調べよう。そのためには式 (3.129, 3.130) において、$\boldsymbol{B}_\perp$ 以外の電磁場の成分をゼロと置く。すると次式を得る。

$$\frac{d\boldsymbol{P_\beta}}{dt} = -\frac{Ze}{m}G\boldsymbol{B}_\perp \times \boldsymbol{P_\beta}. \tag{3.140}$$

磁場と偏極ベクトルがなす角度を θ とすると、式 (3.140) から偏極ベクトルの回転角度 ϕ は

$$\phi = -\frac{Ze}{m\beta c}G\sin\theta\int B_\perp ds, \tag{3.141}$$

となる。回転角が最大となるのはやはり偏極ベクトルと磁場が垂直な場合である。そのような場合で、かつ磁場が区間 L で一定の場合、回転角は次のように表される。

$$\phi = -\frac{Ze}{m\beta c}GB_\perp L, \tag{3.142}$$

偏極ベクトルの回転角は磁場の積分値に比例する。

3.4.4 Spin Manipulation

偏極ベクトルの回転はスピン、ビームという多粒子系における偏極度の保存にとって重要である。なぜなら無偏極ビームには方向性はなく、仮りに個々の粒子のスピン回転を考えたとしても、全体としてはどのような回転などの操作を行っても無偏極であり、方向性がないことに変わりはない。問題となるのは、偏極したビームがあった場合、減偏極（偏極度が減少する効果）せずに、それをどのように意図したように操作するのかということである。

まず減偏極について考察しよう。減偏極の原因となるのはビームのエネルギー広がりである。ビームというの多粒子系であるので、ビームのエネルギーはある中心のまわりに有限の広がりを持っている。偏極ベクトルの回転角は式 (3.139) あるいは (3.142) で示されているように磁場のみならず γ や β など個々の粒子のエネルギーや速度に依存する。すなわちビームに含まれる粒子がエネルギー広がりをもっていると、偏極ベクトルの回転角度も広がりをもち、最初は個々の粒子でそろっていた偏極方向がずれてくる。これを減偏極といい、偏極度を減少させる効果をもつ。

電子の蓄積リングなどに長時間ビームを回し続けることを考えよう。最初偏極ベクトルがビームの進行方向に対して平行であった場合、式 (3.142) で示されているように偏極ベクトルはビームの進行方向に対して回転をはじめる。回転軸は磁場方向、すなわち鉛直方向である。式 (3.142) には β が含まれているので、ビームが γ においてエネルギー広がり $\Delta\gamma$ を有している場合、生じる偏極ベクトルの角度広がり（ばらけ具合）は、

$$\Delta\phi = \frac{eG}{m\gamma^3\beta^3 c}nBL\Delta\gamma, \tag{3.143}$$

となる。ここで n は周回数、BL は一周あたりの磁場の積分値である。このように偏極ベクトルの広がりは周回数にしたがって増加し、π になると、ほぼ等方的となり、偏極度がゼロとなるから、偏極ベクトルは意味をなさなくなる。

このような減偏極の効果を抑制するには、磁場に対して偏極ベクトルを平行にしてやることである。式 (3.141) に示されているように、偏極ベクトルの回転速度は磁場と偏極ベクトルのなす角の正弦 $\sin\theta$ に依存するので、平行ならば偏極ベクトルの回転速度はゼロとなり、減偏極も生じない。そのため、例えば電子蓄積リングへの入射時にはス

ピンはビーム周回軌道に対して鉛直方向、すなわち偏向磁場と平行な方向にしてやればよい。このように減偏極を抑制するには偏極ベクトル方向を特定の方向を向くように操作してやる必要がある。

また電子陽電子コライダーのような物理実験においては、衝突現象を生じさせるさい、偏極度および偏極方向が初期状態を決める重要なパラメーターのひとつとなる。そのため、衝突点において任意の偏極状態を作れるように、偏極ベクトルの方向をやはり操作してやる必要がある。

以上のように、減偏極の抑制と物理実験上の必要性から、偏極ベクトルの方向を操作してやる必要が生じる。偏極ベクトルの回転などの操作を意図したビーム輸送ラインをスピンローテーター (Spin rotator) という。Spin rotator にはソレノイド磁場を用いたもの、偏向磁場を用いたもの、また電場と磁場の組み合わせによるもの（Wien Filter) などがある。偏向磁場を用いた Spin rotator は偏極ベクトルとともに粒子軌道も変化させてしまうため実用上制限が大いが、Spin manipulation を理解するため、ここではソレノイド磁場と偏向磁場を仮定しよう。

原理的に三つのソレノイド磁場と偏向磁場によるスピンローテーターを用意することで、任意の方向を向いた偏極ベクトルを、任意の方向に回転させることができる。二つでも充分であるように見えるが、最初の偏極ベクトルの方向が磁場と平行な場合、スピンローテーターのうちのひとつは偏極ベクトル回転にまったく使用できないことになり、実質的にひとつのスピンローテーターしか使えないことになる。初期状態として任意の方向を仮定すると必要なスピンローテーターは三つとなるのである。

第 4 章

加速空洞

前章で述べたように、ビームを加速するためには、電子の進行方向と平行に電場を作る必要がある。また、静電場による加速には技術的な限界があることから、一般的に RF（高周波）の電場による加速が用いられる。真空のマクスウエル方程式から求められる平面波は、電場と磁場はその進行方向に対して垂直な方向に発生するため、ビームとともに進行する平面波では、粒子を加速できない。そのために、適当な境界条件を金属などによってつくってやり、加速電場が粒子の進行方向と平行にする。このための構造を加速構造、あるいは加速空洞と呼ぶ。実際の加速器には様々なタイプの加速空洞が用いられるが、ここでは単純な Pill-box 型空洞からはじめて、実際の線形加速器でよく用いられる定在波型空洞と進行波型空洞を説明しよう。

4.1　Pill-box 型空洞

Pill-box 型空洞とは、円筒型の金属空洞のことである。最低次モードとなる TM_{010} モードでは円筒の中心軸に電場が発生するため、これを加速に用いる。この形の空洞は解析的に内部の電磁場モードを解くことができるため、空洞の一般的な性質を理解する材料として適当である．復習のため、Maxwell 方程式をあげておこう。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{4.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{4.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{4.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{4.4}$$

真空中の場合は、電荷密度 $\rho = 0$、オーム電流 $\boldsymbol{J} = 0$ となるので、真空中における波動方程式が導かれる。

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{4.5}$$

$$\Delta \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0, \tag{4.6}$$

ここで Δ はラプラシアンであり、カルテシアンおよび円筒座標系において各々

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{4.7}$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{4.8}$$

と与えられる。また、電磁場の角振動数を ω であたえると、時間依存の成分を分離できて、

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_s} \exp(\imath \omega t), \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_s} \exp(\imath \omega t), \tag{4.10}$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{E_s}$ と $\boldsymbol{B_s}$ は各々電場と磁束密度の空間依存部分をあらわすベクトルである。これを式 (4.5) と (4.6) に代入すると、時間を含まない波動方程式を得る。

$$\Delta \boldsymbol{E_s} + k^2 \boldsymbol{E} = 0, \tag{4.11}$$

$$\Delta \boldsymbol{B_s} + k^2 \boldsymbol{B} = 0, \tag{4.12}$$

ここで k は波数で、

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2, \tag{4.13}$$

と与えられる。この方程式を与えられた境界条件で解くことで加速空洞内の電磁場が得られる。

問題 2-1 式 (4.5) および式 (4.6) を導け。

4.1.1 Pill box structure

半径 b, 長さ L の円筒形共振空洞の内に閉じ込められている電磁場を考える。様々なモードが存在しうるが、そのうち加速に用いられるモードは TM_{010} と呼ばれるモードである。このモードでは円筒の軸に平行に電場が立ち、磁場をそれを取り囲むように円周にそっている。円筒座標系を用いると、z 軸方向の電場と ϕ 方向の磁場以外はゼロとなる。電場 E_z と磁場 B_ϕ は次のように与えられる。

$$E_z = E_0 J_0(kr) \cos \omega t \tag{4.14}$$

$$H_\phi = -\frac{E_0}{Z_0} J_1(kr) \sin \omega t, \tag{4.15}$$

ここで $Z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$, $k = 2\pi/\lambda = p_{01}/b$, p_{01} は Bessel 関数の根で 2.405 である。

このモードの蓄積エネルギー W と電力消費 P は次のように求められる。蓄積エネルギーとはある瞬間に空洞の内部に存在する電磁場が蓄えているエネルギーである。

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E_z^2 dV \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V [E_0 J_0(kr)]^2 dV \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \int_z \int_r J_0^2(kr) 2\pi r dr dz \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2 L\pi}{2} \int_r J_0^2(kr) 2r dr \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2 L\pi}{2} \left[r^2 [J_1^2(kr) - J_0^2(kr)] \right]_0^b \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \pi b^2 L J_1^2(p_{01}), \end{aligned} \tag{4.16}$$

また、消費電力は、空洞に電磁場が存在しているときに、その電磁場がつくる壁電流による消費電力の合計で、次の

ように求められる。

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{R_s}{2}\int_A H_\phi^2 dA \\
&= \frac{R_s E_0^2}{2Z_0^2}\int_A J_1^2(kr)dA \\
&= \frac{R_s E_0^2}{2Z_0^2}\left[\int J_1^2(kr)2\pi r dr + 2\pi b\int J_1^2(p_{01})dz\right] \\
&= \frac{R_s E_0^2}{2Z_0^2}\left(2\pi\left[r^2[J_1^2(kr) - J_0(kr)J_2(kr)]\right]_0^b + 2\pi b L J_1^2(p_{01})\right) \\
&= \frac{R_s E_0^2 \pi b}{Z_0^2}(b+L)J_1^2(p_{01}) \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

R_s は表面抵抗であり, 次の式であたえられる.

$$
R_s = \frac{\rho}{\delta_s}, \qquad (4.18)
$$

ρ は抵抗率 $\Omega.m$, δ_s は skin depth(表皮の厚さ、RF が導体に入り込む深さ) である. 高周波空洞の材料としてよく用いられる銅の抵抗率は 1.7E-8$\Omega.m$ である. Skin Depth は周波数に依存し,

$$
\delta_s = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}, \qquad (4.19)
$$

とあたえられる.

空洞の Q 値は様々な解釈が可能な量であるが、ここでは空洞の蓄積されたエネルギーが消費されるまでに電磁場が行う振動の回数 (角振動数) として定義しよう。蓄積エネルギーを消費エネルギーでわり、角振動数をかけたものがこの Q 値になる。

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{\omega W}{P} \\
&= \frac{\omega(=ck=cP_{01}/b)Z_0\varepsilon(=\sqrt{\mu\varepsilon}=1/c)Z_0 bL}{2R_s(b+L)} \\
&= \frac{P_{01}Z_0 L}{2R_s(b+L)} \\
&= \frac{G_1}{R_s} \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

G_1 は

$$
G_1 = \frac{P_{01}}{2}\left(\frac{L}{b+L}\right)Z_0 = 453\left(\frac{L}{b+L}\right)[\Omega], \qquad (4.21)
$$

なので空洞の形状のみによって決められる係数。したがって Q の周波数依存性は R_s のみにより、$Q \sim 1/\sqrt{\omega}$ となる。

Shunt impedance r は、空洞に生じる加速電場の二乗 V^2 を消費電力 P で規格化したものであり、電気回路における抵抗値と類似した概念である。加速電場 V については、ある時間を停止させて電場を積分した値を用いる場合と、電子の移動にともない、時間とともに変化する電場を積分したものを用いる場合がある。ここでは後者を用いている。ここでは長さでさらに規格化したものを r として定義しよう。

$$
r = \frac{V^2}{PL}, \qquad (4.22)
$$

このシャントインピーダンス r と Q の比をとると、

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{Q} &= \frac{V^2}{\omega W L} \\
&= \frac{2(E_0 T L)^2}{\omega \pi \varepsilon b^2 L^2 E_0^2 J_1^2(P_{01})} \\
&= \frac{2T^2 Z_0}{\omega(= cP_{01}/b)\pi(= P_{01}\lambda/(2b)) Z_0 \varepsilon(= 1/c) b^2 J_1^2(P_{01})} \\
&= \frac{4T^2 Z_0}{P_{01}^2 J_1^2(P_{01})\lambda} \\
&= \frac{G_2 T^2}{\lambda},
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

とかける。ここで G_2 は

$$
G_2 = \frac{4Z_0}{P_{01}^2 J_1^2(P_{01})} = 967[\Omega], \tag{4.24}
$$

とモードに固有の定数、T は transit time factor

$$
T = \frac{\sin(\pi L/\lambda)}{\pi L/\lambda}, \tag{4.25}
$$

でモードおよび空洞長によって若干変化するが、その違いはとても小さい。したがって r/Q の周波数依存性はほぼ λ のみにより $r/Q \sim \omega$ となる。Shunt impedance r そのものは、次のように表される。

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{r}{Q} Q \\
&= \frac{G_1 G_2 T^2}{\lambda R_s},
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

とかけ、その周波数依存性は $r \sim \sqrt{\omega}$ である。

空洞共振器の等価回路的取扱い

高周波を取り扱う場合の等価回路モデル、すなわちある境界条件の中にある電磁場の振舞をある等価な電気回路で表す場合、一般的には分布定数回路を考えなければならない。すなわち、導波管であれば、微小なインピーダンスとアドミッタンスが結合されており、それが回路にそって分布しているというものである。

しかし特定のモードに対する共振周波数の近傍での振舞を再現することは、集中定数回路でも可能である。そのような場合を考えよう。

今、L、C、R が直列に接続された回路があり、これが電圧源で動作しているとしよう。回路の複素インピーダンスは

$$
Z = R + \jmath(\omega L - \frac{1}{\omega C}), \tag{4.27}
$$

である。ここで ω は電源の駆動角周波数である。この回路の共振周波数はインピーダンスの虚数成分がゼロとなる条件から、

$$
\omega_0 = \frac{1}{LC}, \tag{4.28}
$$

と求められる。この共振周波数を用いてインピーダンスを記述すると、

$$
Z = R\left[1 + \jmath\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right], \tag{4.29}
$$

となる。この式により、空洞が共振周波数で駆動された場合、インピーダンスの複素成分がゼロとなることがより明瞭にしめされている。この空洞の Q 値を次のように定義する。

$$Q = \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0}CR, \tag{4.30}$$

これを用いると、インピーダンスは

$$Z = R\left[1 + \jmath Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right], \tag{4.31}$$

と表される。Q 値は quality factor に由来しており、もともとは共振現象などの品質、鋭さを表す量である。Q が大きいければ大きいほど、周波数が共振からずれたときのインピーダンスの増加が大きくなり、結果として共振は鋭いピークを示す。逆に Q が小さい場合、周波数の変化によるインピーダンスの変化は小さく、共振は広がったピークとなる。それを示すために、今共振周波数からのずれを $f = f_0 + \delta f$ として表そう。するとインピーダンスは

$$Z \sim R\left(1 + \jmath Q\frac{2\delta f}{f_0}\right), \tag{4.32}$$

となる。今、$\delta f = f_0/(2Q)$ の周波数のずれを仮定すると、

$$Z \sim R\,(1 + \jmath)\,, \tag{4.33}$$

となり、大きさをとると $Z^2 \sim 2R^2$ となる。共振時は $Z = R$ であるから、共振時にくらべて、上の周波数のずれを仮定した場合はインピーダンスが倍になっている。従って、流れる電流は $1/\sqrt{2}$、消費電力は電圧源から供給される電力は ZI^2 であるから、電力は 1/2 となっている。

逆に、ある共振空洞において、共振時に比べて、消費電力が 1/2 となる周波数を $f \pm \delta f$ とすると、

$$Q = \frac{f}{2\delta f}, \tag{4.34}$$

と Q をもとめることができる。等価回路のインピーダンス成分は直接測定はできないので、Q 値はこの方法から求める。

今、回路が共振状態にあるとしよう。この時、インピーダンスは抵抗成分のみで $Z = R$ である。その時の抵抗 (すなわち全回路) での消費電力は

$$P = \frac{1}{2}RI^2, \tag{4.35}$$

である。この時にコンデンサーに蓄えられているエネルギーは

$$W_C = \frac{1}{2}CV_C^2 = \frac{C}{2}\left(\frac{I}{\jmath\omega_0 C}\right)^2 = \frac{1}{2}LI^2, \tag{4.36}$$

インダクタンスに蓄えられているエネルギーも同じで値であるが、位相が π だけずれており、ある時間にその和をとると、 $W = W_C + W_L = 1/2LI^2$ である。ここで唐突だが、Q の定義を再び書き下すと、

$$Q = \omega_0\frac{L}{R} = \omega_0\frac{1/2LI^2}{1/2RI^2} = \omega_0\frac{W}{P}, \tag{4.37}$$

と書き直すことができる。最後の表現の分子はこの回路に蓄積されているエネルギー、分母は消費エネルギーであるから、この比に時間あたりの角周波数をかけた値は、回路に蓄積されているエネルギーが消費されるまでの角振動数を表している。

ここで、減衰の効果をより明瞭にしめすため、回路にいくばくかの電流が流れている状態で、この回路から電源を切り離し、そこで短絡させた状態を考えよう。これは空洞共振器が電源からの停止された後、どのような振舞を行うのかに相当する。この時の回路方程式は

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = 0, \tag{4.38}$$

である。この時、解として

$$I = I_0 exp(-\alpha t), \tag{4.39}$$

を仮定すると、これを方程式に代入して

$$L\alpha^2 - R\alpha + \frac{1}{C} = 0, \tag{4.40}$$

これより α は

$$\alpha = \frac{R}{2L}(1 \pm \sqrt{1-4Q^2}), \tag{4.41}$$

となる。ルートの中身は負となるので、この項は振動項となる。減衰項のみ示すと

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) = I_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right), \tag{4.42}$$

となり、電流は時定数 $\omega_0/2Q$ で減衰する。蓄積エネルギー W は電流の二乗であるから、その減衰も異なり、

$$W = \frac{1}{2}LI^2 \sim \frac{1}{2}LI_0^2 \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q}t\right), \tag{4.43}$$

のように減衰する。これより、蓄積エネルギーの時間変化率は

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q}W, \tag{4.44}$$

となる。エネルギー変化率の負号をとったものが消費電力であるから、

$$\frac{dW}{dt} = -P, \tag{4.45}$$

である。これよりみたび Q の定義が得られる。

$$Q = \omega_0 \frac{W}{P}, \tag{4.46}$$

複数の空洞の結合

複数の空洞を結合した一般の空洞の場合、次のようにモデル化される。すなわち各々の空洞は LCR 等価回路により表される。また、複数の空洞の間の結合は相互インダクタンスにより表される。自己インダクタンスと相互インダクタンスを合わせて、ひとつのインダクタンスにとなりあった空洞の電流がともに流れる場合を想定しよう。基本的に同一の空洞の構造がならんだものを考えるが、境界条件を考えると、端部のセルは空洞長を他のセルの半分にとる必要がある。これを等価回路を用いて考えよう。

N セルの空洞がカップリング L_c で結合して、ω で振動しているとする。回路の方程式は

$$\left(\frac{1}{\jmath\omega C} + R + \jmath\omega L\right) i_n + \jmath\omega L_c(i_n - i_{n+1}) + \jmath\omega L_c(i_n - i_{n-1}) = 0, \tag{4.47}$$

となる。電流は全てのセルで等しいとし、セル間の位相差を ϕ とすると n 番目のセルを流れる電流は

$$i_n = i_0 e^{j(\omega t + n\phi)}, \tag{4.48}$$

と置ける。これを代入すると

$$\left(\frac{1}{\jmath\omega C} + R + \jmath\omega L\right) i_n + \jmath\omega 2L_c(1-\cos\phi)i_n = 0, \tag{4.49}$$

となる。i_n で割って整理すると

$$\frac{1}{\jmath\omega C} + R + \jmath\omega\left[L + 2L_c(1-\cos\phi)\right] = 0, \tag{4.50}$$

となるので、共鳴条件は

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{2L_c}{L}\cos\phi \right]^{-1/2} \tag{4.51}$$

となる。ここで ω_0 は空洞の基本周波数 $\omega_0 = 1/\sqrt{C(L+2L_c)}$ である。空洞長を半分にすると $C \to 2C$, $R \to R/2$, $L \to L/2$ となるので、端のセルの回路の方程式は

$$\left(\frac{1}{\jmath\omega 2C} + \frac{R}{2} + \jmath\omega\frac{L}{2} \right) i_1 + \jmath\omega L_c (i_1 - i_2) = 0, \tag{4.52}$$

となる。同様の計算を行うと

$$\frac{1}{\jmath\omega C} + R + \jmath\omega \left[L + 2L_c(1 - e^{\jmath\phi}) \right] = 0, \tag{4.53}$$

となり、$e^{\jmath\phi}$ を実部と虚部で展開すると

$$\frac{1}{\jmath\omega C} + R + 2L_c\omega\sin\phi + \jmath\omega\left[L + 2L_c(1-\cos\phi) \right] = 0, \tag{4.54}$$

となり、共振条件は式 (4.51) と同じになり、端部のセルでも同様の共振が生じることがわかる。

4.1.2　ビームローディングを含んだ空洞の等価回路

単独のビーム加速のための空洞がクライストロン等の高周波源でドライブされている場合を考えよう。図 4.1 で示されているように、RF 空洞は並列 LCR 共鳴回路で表されるとする。電源であるクライストロンを電流源として仮定すると、空洞中を通過するビームとクライストロンという、ふたつの電流源で駆動される共振回路と表すことができる。それを各々 i_g および i_b としよう。空洞に入力されたパワーの一部は反射波としてクライストロン側に戻ってくるが、そこで全て吸収されてしまうと仮定する。すなわち、空洞へ入力されるパワーはクライストロンが発生したパワーおよびビームのつくる電力のみであるとする。

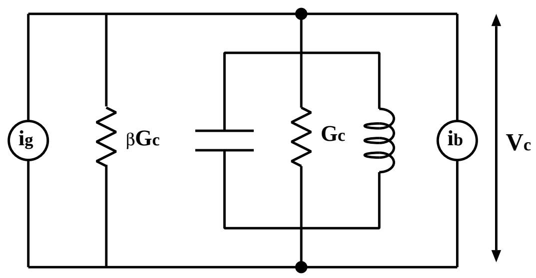


図 4.1　クライストロンでドライブされる空洞の等価回路。電子ビームは電流源として記述される。

クライストロンと空洞のカップリングを β であらわす。空洞の抵抗性のアドミッタンスを G_c とすると、この場合クライストロンの側の内部アドミッタンスは空洞側からみて βG_c として見える。クライストロンの出力パワー P_g は

$$P_g = \frac{1}{8}\frac{i_g^2}{\beta G_c}, \tag{4.55}$$

係数 1/8 は実効値表示によるものである。 DC にしてビームカレント I_0 のビームが通過することを考えると、バンチ長により実効的なビームカレントは変化する。ビームのバンチ長が RF の周期にたいして充分に長い場合、ビームによるパワーの消費は RF の半サイクル毎に相殺して、実効的にゼロとなる。逆に、ビームが RF の周期に対して短

い場合 $\omega_0\sigma_t \ll 1$ ではピーク値を実効的な電流とすべきである。まとめると、

$$G_c = \frac{2}{R_a} \tag{4.56}$$

$$P = \frac{1}{2}G_cV^2 = \frac{V^2}{R_a} \tag{4.57}$$

$$i_b = 2I_0e^{-\omega_0^2\sigma_t^2/2} \sim 2I_0, \tag{4.58}$$

となる。RF 源とビームが励起する各々の電圧が独立として求めると

$$V_{gr} = \frac{i_g}{G_c(1+\beta)} = \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}\sqrt{R_aP_g} \tag{4.59}$$

$$V_{br} = -\frac{i_b}{G_c(1+\beta)} = \frac{I_0R_a}{1+\beta}, \tag{4.60}$$

となる。ここで、i_g と i_b は逆向きに流れるので、i_b に負号をつけたことに注意せよ。ここで加速電場 V_a は RF 源とビームが誘起する電圧の和となるから

$$V_a = V_{gr} + V_{br}, \tag{4.61}$$

となるはずである。また、この空洞のシャントインピーダンス R_a とジュール損失 P_c から

$$V_a = \sqrt{R_aP_c}, \tag{4.62}$$

である。式 (4.60, 4.59) を (4.61) に代入して

$$V_a = \sqrt{R_aP_g}\left[\frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}\left(1-\frac{K}{\sqrt{\beta}}\right)\right] \tag{4.63}$$

を得る。また、加速効率 η を

$$\eta = \frac{I_0V_a}{P_g}, \tag{4.64}$$

と定義すると、次式を得る。

$$\eta = \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}\left[2K\left(1-\frac{K}{\sqrt{\beta}}\right)\right], \tag{4.65}$$

また、電力反射率を T_r とすると、

$$T_r \equiv \frac{P_r}{P_g} = \frac{[(\beta-1)-2K\sqrt{\beta}]}{(\beta+1)^2}, \tag{4.66}$$

と表される。ここで K はビームローディング係数で

$$K = \frac{I_0}{2}\sqrt{\frac{R_a}{P_g}}, \tag{4.67}$$

と与えられる。

問題 2-2 式 (4.63) を求めよ。
問題 2-3　式 (4.65) を求めよ。

効率 η を β について微分すると

$$\frac{\partial\eta}{\partial\beta} = \frac{K}{\sqrt{\beta}(1+\beta)^2}(1-\beta+2\sqrt{\beta}K), \tag{4.68}$$

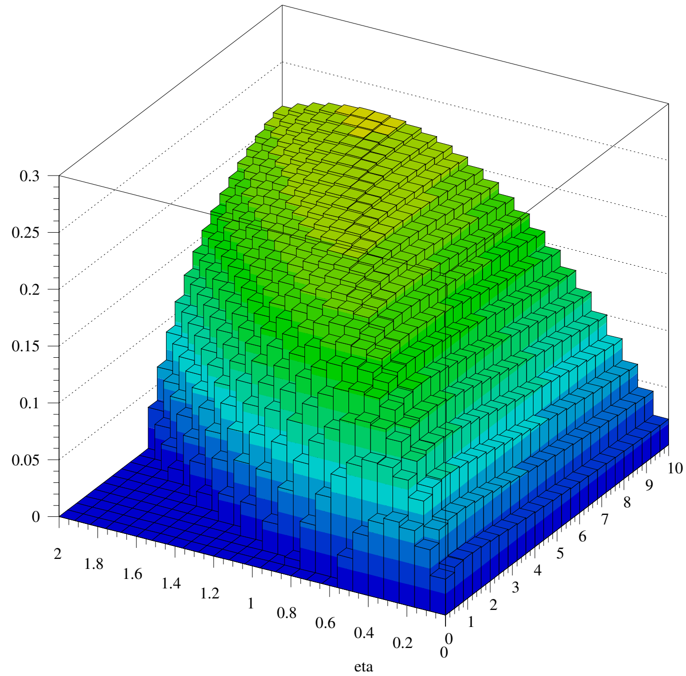
となる。微分係数をゼロとする条件は右辺の括弧内をゼロとして

$$K = \frac{\beta-1}{2\sqrt{\beta}}, \tag{4.69}$$

となる。一方 η を K について微分すると

$$\frac{\partial\eta}{\partial K} = \frac{4\sqrt{\beta}}{1+\beta}\left(1-\frac{2}{\sqrt{\beta}}K\right), \tag{4.70}$$

となる。従って 微分係数をゼロとする条件は



ビーム加速の電力効率 η を K および β 平面であらわしたもの。

$$K = \frac{\sqrt{\beta}}{2}, \tag{4.71}$$

となり、式 (4.69) とは若干異なる。両式を連立させてみればわかるが、これらの式は β は不能となり、両式を同時に満足する K および β は存在しない。

4.2　定在波型加速空洞

ここでは実際に線形加速器でよく使用される加速空洞として、定在波型加速空洞を説明する。今までの議論では空洞にはすでに RF パワーで満たされたものとして扱ってきたが、ここからは空洞への RF の入力、さらに過渡的状態についても考察する。

4.2.1　単セルモデル

定在波空洞の多くは複数の空洞が連結されたものであり、そのうちの一つの空洞に外部から RF が入力され、次々と隣接されたセルへと RF 入力が伝搬する。後述する進行波型空洞と定在波型空洞の大きな違いは、電磁波の群速度の違いである。進行波型空洞では群速度は有限であるが、定在波型空洞では群速度はゼロである。群速度ゼロであるから、電磁波のパワーは伝搬しないように思うが、それは正しくない。定在波は逆方向に進行する電磁波の重ね合わせであるから、正確には逆方向に電磁波が進行するので正味の群速度がゼロとなるのである。過渡的状態においては、入力側空洞と隣接空洞では蓄積エネルギーに差があるのでその差に比例してパワーの伝搬が起きる．これを模式的に図 4.2 に示す．　ここでは複数あるセルを大きな単独のセルで代替してしめしてある．このような空洞のモデルを単独セルモデルといい、一般的によく用いられているモデルである．空洞には外部からパワー P_{in} が入ってくる．その一部

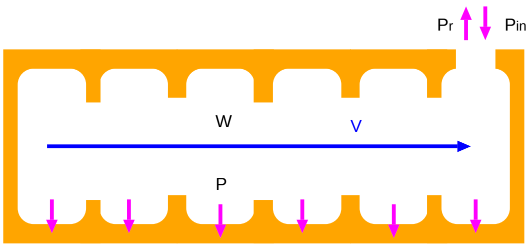


図 4.2　定在波型空洞の単セルモデル．実際は複数のセルからなるが、ここでは単独のセルとみなしている。

は P_r として入力側に反射してしまう. 実効的な入力パワーは、空洞内にエネルギー W として蓄積され、空洞壁で最終的に P として消費される. この関係を方程式で示すと

$$\frac{dW_0}{dt} = P_{in} - P_r - P_0, \tag{4.72}$$

となる．この式を電圧表示に変換しよう．

$$\frac{dW_0}{dt} = \frac{Q_0}{\omega}\frac{dP_0}{dt} = \frac{Q_0}{\omega}2G_0V_0\frac{dV_0}{dt}, \tag{4.73}$$

ここで G_0 はアドミッタンスと呼ばれる量で $P_0 = G_0V_0^2$ である．同様に導波管のアドミッタンスを $G_w = \beta G_0$ として $P_{in} = \beta G_0 V_{in}^2$ および $P_r = \beta G_0(V_{in} - V_0)^2$ を用いると

$$\frac{Q_0}{\omega}2G_0V_0\frac{dV_0}{dt} = -\beta G_0V_0^2 + 2\beta G_0V_oV_{in} - G_0V_0^2. \tag{4.74}$$

$Q_0 = (1+\beta)Q_L$ を用いると,

$$\frac{2Q_L}{\omega}\frac{dV_0}{dt} = -V_0 + \frac{2\beta}{1+\beta}V_{in}, \tag{4.75}$$

を得る．これは $\tau \equiv 2Q_L/\omega$, $\alpha \equiv 2\beta/(1+\beta)$ と置くと,

$$\tau\frac{dV_0}{dt} = -V_0 + \alpha V_{in}, \tag{4.76}$$

となる．この方程式は簡単に解けて、$t = 0$ で $V_0 = 0$ という初期条件では

$$V_0(t) = \frac{2\beta}{1+\beta}\sqrt{\frac{P_{in}}{\beta G_0}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{4.77}$$

となる．すなわち、パワーを入れてからある時定数をもって、ある値に漸近していく．

ついでにビームローディングを含んだ式を考えよう．ビームローディングとはビームによるエネルギー損失だから式 (4.74) を

$$\frac{Q_0}{\omega}2G_0V_0\frac{dV_0}{dt} = -\beta G_0V_0^2 + 2\beta G_0V_oV_{in} - G_0V_0^2 \quad - IV_0, \tag{4.78}$$

と書き換える．最後の項がビームローディングによるエネルギー損失で, 空洞電圧とビームローディング電流 I との積である．厳密にはビーム電流とローディング電流は異なるが、当面は同じものと考えていて差し支えない．この式を変形すると

$$\frac{2Q_L}{\omega}\frac{dV_0}{dt} = -V_0 + \frac{2\beta}{1+\beta}V_{in} \quad - \frac{I}{(1+\beta)G_0}I, \tag{4.79}$$

となる．解は

$$V_0(t) = \frac{2\beta}{1+\beta}\sqrt{\frac{P_{in}}{\beta G_0}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - \frac{I}{(1+\beta)G_0}\left(1 - e^{-\frac{t-t_b}{\tau}}\right), \tag{4.80}$$

となる．ここでは初期条件として $t=0$ で RF 入力を開始し, $t=t_b$ でビーム加速を開始した、としている．第一項が RF 入力による電圧上昇、第二項がビームローディングによる電圧の減少である．特徴的なのは、二つの項がともに同じ時定数をもった指数関数な点である．このことから、二つの項が同じ振幅を持てば、電圧は時間に依存せず一定となり、加速されたビームのエネルギーは均一となる．その条件を求めよう．式 (4.80) の両辺を時間で微分すれば, 次の条件を得る．

$$t_b = -T_0 \ln\left(\frac{I}{2}\sqrt{\frac{rL}{\beta P_0}}\right), \tag{4.81}$$

ここで, $r=1/(G_0 L)$ は単位長さあたりのシャントインピーダンスと呼ばれる量である．この式より, ビーム電流と入力パワーが決まれば、加速を一定とするタイミングは一意に決まることがわかる．この時の電圧は

$$V_0 = \frac{2\sqrt{\beta P_0 Lr}}{1+\beta}\left(1-\frac{I}{2}\sqrt{\frac{Lr}{\beta P_0}}\right), \tag{4.82}$$

となり、やはり電流とパワーで一意に決まる．

4.2.2　多セルモデル

実際の加速管の多くは複数のセルが連結し, そのうちの一つのセルが外部入力と結合している．前節では多セル全体をあたかも大きな一つのセルとみなして議論したが, 実際にはセル間のカップリングは有限であり, より厳密には図 4.3 に示しているように空洞モデルを考えるのがより現実に近い．ここでは $N=11$ のセルを考えよう．すなわち, ひ

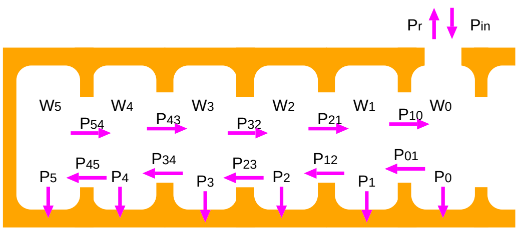


図 4.3　定在波型空洞の多セルモデル．中央のセルのみに外部入力が結合し, 隣接するセル間の結合を通してパワーが全体に充填される．

とつのセルにのみ外部結合があるのは共通であるが, 各々のセルにはセル間カップリングを通じてパワーが充填される．今、i セルにおける蓄積エネルギー, 電圧, そして消費電力を w_i, V_i, そして P_i とする．また Q 値はすべてのセルで共通

$$Q_0 = \frac{\omega W_i}{P_i}, \tag{4.83}$$

であるとする．またアドミッタンスも共通であるとして

$$P_i = GV_i^2, \tag{4.84}$$

としよう．結合セルのエネルギーの時間微分は

$$\frac{dW_0}{dt} = -P_0 - P_{01} - P_{0-1} + P_{10} + P_{-10} + P_{in} - P_r - IV_0, \tag{4.85}$$

ここで P_{in} および P_r は入力および反射パワー, IV_0 はビームローディング項, P_{0-1} および P_{01} は隣接するセルに流出エネルギー, P_{-10} と P_{10}　は隣接するセルから流入するパワーである．セル間を移動するパワーはカップリングを用いて $P_{01}=kQP_0$, $P_{10}=kQP_1$ のように書けるから, これらを式 (4.85) に代入すると

$$\frac{dW_0}{dt} = -GV_0^2 - 2kQGV_0^2 + kQGV_1^2 + kQGV_{-1}^2 + G_{wg}V_{in}^2 - G_{wg}(V_{in}-NV_0)^2 - IV_0, \tag{4.86}$$

を得る．加速管全体を N 個のセルから成り立っているとすると，V_{in} や G_{wg} は加速管全体の電圧やアドミッタンスに相当するが，V_0 や G_0 はひとつのセルの電圧やアドミッタンスに相当するから各々 N 倍そして $1/N$ としている．すなわち　$G_{wg} = \beta G_0 = \beta G/N$ である．

$$\frac{dW_0}{dt} = -(1+N\beta-2kQ)GV_0^2 + kQGV_1^2 + kQGV_{-1}^2 + 2\beta GV_{in}V_0 - IV_0. \tag{4.87}$$

$W_0 = \frac{Q}{\omega}GV_0^2$ と書き換えると

$$\frac{dV_0}{dt} = -\left[\frac{(1+N\beta)\omega}{2Q} + k\omega\right]V_0 + \frac{1}{2}k\omega\frac{V_1^2}{V_0} + \frac{1}{2}k\omega\frac{V_{-1}^2}{V_0} + \frac{\omega\beta}{Q}V_{in} - \frac{\omega RI}{2Q}, \tag{4.88}$$

となる．セル間のカップリングを表す k は空洞と外部との結合を表す $1/Q$ よりもかなり大きいため，セル間の電圧差は大きくないと考えられる．　そこで隣接するセル間で $V_i(t) \sim V_j(t)$ が成り立つとする，ここで $i = j \pm 1$ である．すると $V_1^2/V_0 \sim V_1$ あるいは $V_{-1}^2/V_0 \sim V_{-1}$ のように近似できるから

$$\frac{dV_0}{dt} = -\left[\frac{(1+N\beta)\omega}{2Q} + k\omega\right]V_0 + \frac{1}{2}k\omega V_1 + \frac{1}{2}k\omega V_{-1} + \frac{\omega\beta}{Q}V_{in} - \frac{\omega RI}{2Q}. \tag{4.89}$$

同様に V_1 などについての式を導くと

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{2}k\omega V_0 - \left(\frac{\omega}{2Q} + k\omega\right)V_1 + \frac{1}{2}k\omega V_2 - \frac{\omega RI}{2Q}. \tag{4.90}$$

端部のセルは次のセルが無いので

$$\frac{dV_5}{dt} = \frac{1}{2}k\omega V_4 - \left(\frac{\omega}{2Q} + \frac{1}{2}k\omega\right)V_5 - \frac{\omega RI}{2Q}. \tag{4.91}$$

などとなる．

以上のように複数のセルを仮定した場合，方程式の数はセルの数だけあるので，N 次の連立線形微分方程式となる．線形微分方程式なので解けそうであるが，一つの方程式に二つ以上のセルの変数が混じり込んでいてこのままでは解くことはできない．とくためには変数の混じりを無くさなければならない．そこでよくやるように行列による解法を用いる．上の連立線形微分方程式を行列の形に書き直すと

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{AV} + \mathbf{C}, \tag{4.92}$$

と書ける．各々の行列は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cdots \\ V_{-1} \\ V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \cdots & & & & \\ & a & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \alpha & a_0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \alpha & a & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & \alpha & a & \alpha & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \alpha & a & \alpha & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & a & \alpha \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & a_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdots \\ V_{-1} \\ V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots \\ -\frac{\omega RI}{Q} \\ \frac{\omega\beta}{Q}V_{in} - \frac{\omega RI}{2Q} \\ -\frac{\omega RI}{Q} \\ -\frac{\omega RI}{Q} \\ -\frac{\omega RI}{Q} \\ -\frac{\omega RI}{Q} \\ -\frac{\omega RI}{Q} \end{pmatrix}, \tag{4.93}$$

のように与えられる．ここで各定数は

$$a_0 = -\frac{(1+N\beta)\omega}{2Q} - k\omega \tag{4.94}$$

$$a = -\frac{\omega}{2Q} - k\omega \tag{4.95}$$

$$a_5 = -\frac{\omega}{2Q} - \frac{1}{2}k\omega \tag{4.96}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}k\omega. \tag{4.97}$$

のように定義される．$\mathbf{A}$ は実対称行列であるから, ある直交行列 $\mathbf{R}$ により

$$\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_{-5} & & & & \\ & \ldots & & 0 & \\ & & \lambda_0 & & \\ & 0 & & \ldots & \\ & & & & \lambda_5 \end{pmatrix}. \tag{4.98}$$

のように対角化することが可能である．この行列表記を用いると，　式 (4.92) は

$$\frac{dt\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{V} + \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}. \tag{4.99}$$

$$\frac{dt\mathbf{V}'}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{V}' + \mathbf{C}', \tag{4.100}$$

のように書き換えることができる．ここで $\mathbf{V}' \equiv \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}$ そして $\mathbf{C}' \equiv \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}$ のように定義した．$\mathbf{B}$ は対角行列であるから、この変換後の基底 $\mathbf{V}'$ に対する方程式にはセル間の結合は無くなり,

$$\frac{dV_i'}{dt} = \lambda_i V_i' + C_i', \tag{4.101}$$

のように記述される．これは数式上は単独セルの場合と同じであり,

$$V_i' = \tau_i C_i' + De^{-\frac{t}{\tau_i}}, \tag{4.102}$$

のように解をもとめることができる．ここで $\tau_i = -1/\lambda_i$, D は積分定数で初期状態から決められる．今 $V'(t=0) = 0$ を仮定すると, 解は

$$V_i'(t) = \tau_i C_i' \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right), \tag{4.103}$$

のように求められる．このように一旦 V' 上における解が求められたならば, これを

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{V}'. \tag{4.104}$$

のように V に再変換すれば, 実際の各々のセルにおける電圧が求められる．すなわち

$$V_i(t) = \sum_{j=0}^{5} R_{ij}\tau_j C_j'(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}), \tag{4.105}$$

である．R_{ij} は直交行列の成分である．

表 4.1 に入力パワー 22.5MW, $\beta = 6.0$, $I_B = 1.0A$, $k = 0.01$, $R = 34.0M\Omega/m$, の場合の計算結果の例を示す．一行目に固有モードの時定数を μs 単位で示してある．各セルの振幅 (C_{ij}) は電圧を MV 単位で示してある．この場合, $\tau = 1.22\mu s$ の 10 番目のモードが振幅において支配的であることがわかる．一方で他のモードのうちいくつかもそれを完全には無視できない程度の大きさとなっていることがわかる．

図 4.4 に、横軸にカップリング β, 縦軸に多セルモデルによる加速管一本あたりの加速電圧を示す。赤丸、緑三角、青逆三角、紫星、シアン星（白抜き）は各々ビームローディング電流が 0.0A, 0.5A, 1.0A, 1.5A, 2.0A の場合をしめしている．　ビームローディング電流が小さい場合、カップリングを大きくすると電圧は低下していくことがわかる。これは、外部の導波管などでの消費電力が増えるためで、その分空洞で消費される電力が減少して電圧が低下する．
一方、ビームローディングが大きい場合，　カップリングが小さいところでは計算上電圧が負となり、まったく加速されない。カップリングを大きくすると電圧が上昇し、ある値で最大化する。ビームローディングが支配的な場合、カップリングを大きくするとビームローディングが抑制され、加速電圧を回復することが可能である．

単独セルの場合と異なり、ビームローディングの補正は単純ではない。単独セルの場合はモードはひとつであり、RF による加速場もビームローディングによる減速場も、同じ時定数で変化した。一方、多セルの場合は複数のモー

$\tau(\mu s)$	0.290	0.009	0.007	0.035	0.020	0.006	0.011	0.068	0.007	1.22	0.014
cell 0	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.063	-0.003	-0.026	-0.228	0.011	1.369	0.000
cell 1	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.013	0.010	0.034	-0.147	-0.027	1.346	-0.000
cell 2	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.073	-0.016	0.015	-0.013	0.025	1.300	-0.000
cell 3	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.045	0.021	-0.039	0.125	-0.007	1.233	0.000
cell 4	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.038	-0.026	-0.002	0.219	-0.016	1.146	0.000
cell 5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.075	0.030	0.040	0.234	0.028	1.039	0.000
cell 6	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.038	-0.026	-0.002	0.219	-0.016	1.146	-0.000
cell 7	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.045	0.021	-0.039	0.125	-0.007	1.233	-0.000
cell 8	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.073	-0.016	0.015	-0.013	0.025	1.300	0.000
cell 9	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.013	0.010	0.034	-0.147	-0.027	1.346	0.000
cell 10	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.063	-0.003	-0.026	-0.228	0.011	1.369	-0.000

表 4.1　$\beta = 6.0$, $I = 1.0A$ における各セルの固有モード (一行目, μs で表示）の電圧を MV 単位で表したもの. 振幅においては $\tau = 1.22\mu s$ のモードが支配的であるが, 他のいくつかのモードも無視はできない.

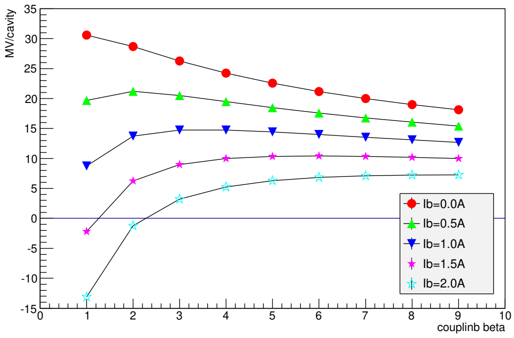


図 4.4　横軸にカップリングベータをとり、異なるローディングカレントにおける多セルモデルで求めた加速電圧を示したもの。

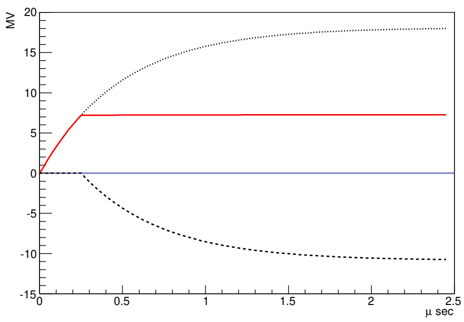


図 4.5　横軸にカップリングベータをとり、異なるローディングカレントにおける多セルモデルで求めた加速電圧を示したもの。

ドの線形結合であり、RF は中央の一つのセルにのみ入力されるのに対して、ビームローディングは各々のセルにほぼ等しく発生するため、各モードの振幅が異なり、単純な打ち消しは期待できない。実際にどの程度ビームローディングが抑制できるのかは個別ケースにおいて検討されなくてはならない。図 4.5 にその一例を示す．　ビームローディング電流として 2.0A を仮定し、その他のパラメーターは同じ値とした。点線は RF による電圧、破線がビームローディングによる電圧、赤実線が加速管に発生する加速電圧である。多数のモードが発生するとしても、支配的なのは少数のモードであるため、ビームローデングの抑制は良好であることがわかる。詳しくみると、ビーム加速開始後の加速電圧を適当な時間幅でサンプルしてヒストグラムにしたものを図 4.6 に示す．　加速電圧の安定性は極めて高く、実用的には定在波空洞におけるビームローディング抑制は有効であることがわかる．

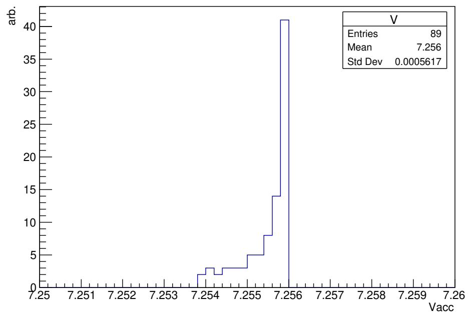


図 4.6　ビーム加速開始後の加速電圧の分布をヒストグラムで示したもの。安定度は RMS で 1.0×10^{-4} を下回っている．

4.3　進行波加速管

進行波型加速管は、管内における電磁波の群速度が有限であることを特徴とする加速管である。図 4.7 にその模式図を示す。群速度が有限であるから、電磁波は入り口から入り、出口から出て行く。電磁波が管内を通過する間のみ加速電場が誘起される。管内を通過するパワー $P(z)$ は空洞内での消費される分だけ減少するから、位置 z の関数となる。シャントインピーダンス $r(\Omega/m)$ や Q 値などは

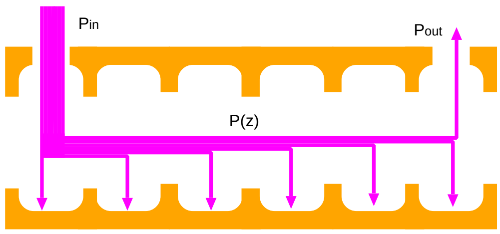


図 4.7　進行波型加速管の模式図。電力は入り口から入り、出口から出て行くが、管内で消費されて減少していく。電力が通過している間だけ加速電場が生じる。

$$r = -\frac{E^2}{dP/dz}, \tag{4.106}$$

および

$$Q = -\frac{\omega W}{dP/dz}, \tag{4.107}$$

と表される。r/Q は

$$\frac{r}{Q} = -\frac{E^2}{\omega W}, \tag{4.108}$$

とやはり消費電力とは無関係である。進行波管に特徴的な量として群速度 v_g があるが

$$v_g = \frac{P}{W} = -\frac{\omega P}{QdP/dz}, \tag{4.109}$$

と表される。これらの定義から次の式が導かれる。

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\omega P}{v_g Q} = -2\alpha P \tag{4.110}$$

α は減衰係数と呼ばれるパラメーターで、加速管の設計により決まるパラメーターである。この右辺の値が一定となるように設計された加速管を Constant Gradient(CG 型, 定勾配）加速管という。角周波数 ω や Q 値は一定であるから、α を調整するのは群速度 v_g である。加速管のアパーチャー（内径）をの大きさにより群速度 v_g は変化するので、上の条件を満たすように内径を加速管全体にわたり変化させる。この時加速勾配は

$$E = \sqrt{-r\frac{dP}{dz}} = \sqrt{-2\alpha P}, \tag{4.111}$$

より、管内で一定となる。管内で電場が高い場所があると、そこで真空放電が発生して運転が困難となるが、勾配を一定にすることでそのようなトラブルを抑制し、より平均電場が高い状態で運転できるのである。

CG 型加速管では長さあたりの電力消費が一定であるから

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P_0 - P_L}{L}, \tag{4.112}$$

となる。ここで P_0 および P_L は入力および出力パワー、L は加速管の長さである。Attenuation constantτ は

$$\tau = \int_0^L \alpha(z)dz, \tag{4.113}$$

と定義される。これを用いると

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P_0(1 - e^{-2\tau})}{L}, \tag{4.114}$$

となる。

4.3.1 ビームローディング

ビームが誘起する減速電場、すなわちビームローディングも、電磁場的には同じモードであるので、同様に出口に向かって伝搬する。以下、ビームローディングを定式化し、その抑制（補正）について、議論する。ビームローディングがある場合の加速管中を進行する RF パワー P の変化は

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dz} &= \left(\frac{dP}{dz}\right)_{wall} + \left(\frac{dP}{dz}\right)_{beam}, \\ &= -2\alpha(z)P(z,t) - I_0 E(z,t),\end{aligned} \tag{4.115}$$

と空洞壁による消費と、ビーム加速による消費により表される。加速管中のビーム進行方向に z をとり、α は減衰パラメーター、I_0 はビーム電流、E は加速電場である。左辺の全微分を展開して

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial t}\frac{dt}{dz}, \tag{4.116}$$

なので、まとめて

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{v_g(z)}\frac{\partial P}{\partial t} + 2\alpha(z)P(z,t) + I_0 E(z,t) = 0, \tag{4.117}$$

を得る。v_g は加速管中での RF の群速度である。これを電場で表すと

$$\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{E}{2\alpha}\frac{d\alpha}{dz} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial E}{\partial t} + \alpha(z)E(z,t) + I_0\alpha r_0, \tag{4.118}$$

となる。ここで

$$P = \frac{E^2}{2\alpha r_0}, \tag{4.119}$$

より

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{E}{2\alpha r_0}\frac{\partial E}{\partial z}, \tag{4.120}$$

等を用いた。r_0 は単位長さあたりのシャントインピーダンスである。また CG の条件

$$\frac{d\alpha}{dz} = -2\alpha(z) \tag{4.121}$$

より、

$$\alpha(z) - \frac{1}{2\alpha(z)}\frac{d\alpha}{dz} = 0, \tag{4.122}$$

となるので、式 (4.118) の第二項と第四項はキャンセルしてゼロとなる。

式 (4.118) の両辺をラプラス変換すると

$$\frac{\partial E(z,s)}{\partial z} + \frac{s}{v_g}E(z,s) + \alpha r_0 I(s) = 0, \tag{4.123}$$

ここで変数 s はラプラス変換での変数である。

両辺を z について積分すると

$$E(z,s) = E(0,s)e^{st_z} - e^{-st_z} r_0 I \int_0^z e^{st_z}\alpha(z)dz, \tag{4.124}$$

加速管全体での加速電圧は [18]

$$\begin{aligned} V(s) = {} & \frac{\omega L}{Q(1-e^{-2\tau})}\frac{1}{s+\omega/Q}E(s)\left(1 - e^{-(s+\omega/Q)t_f}\right) \\ & -\frac{\omega r_0 L}{2Q(1-e^{-2\tau})s}I(s)\left[1 - e^{-\frac{\omega}{Q}t_f} - \frac{\omega(1-e^{-st_f-2\tau})}{Q(s+\omega/Q)}\right]. \end{aligned} \tag{4.125}$$

ここで、入力 RF により発生する電場およびビーム電流を

$$E(t) = E_0 U(t), \tag{4.126}$$

$$I(t) = I_0 U(t-t_i), \tag{4.127}$$

のように定義する。 $U(t)$ は階段関数である。すなわち $t=0$ で RF 入力を開始し, $t=t_i$ でビーム加速を開始する。各々のラプラス変換は

$$E(s) = \frac{E_0}{s}, \tag{4.128}$$

$$I(s) = \frac{I_0}{s}e^{-st_i}, \tag{4.129}$$

となるので、代入すると

$$\begin{aligned} V(s) = {} & \frac{\omega L}{Q(1-e^{-2\tau})}\frac{1}{s+\omega/Q}\frac{E_0}{s}\left(1 - e^{-(s+\omega/Q)t_f}\right) \\ & -\frac{\omega r_0 L}{2Q(1-e^{-2\tau})}\frac{I_0}{s^2}e^{-st_i}\left[1 - e^{-\frac{\omega}{Q}t_f} - \frac{\omega(1-e^{-st_f-2\tau})}{Q(s+\omega/Q)}\right], \end{aligned} \tag{4.130}$$

となる。これを時間ドメインにラプラス逆変換すると

$$V(t) = \frac{E_0 L}{1-e^{-2\tau}}\left[\left(1-e^{-\frac{\omega}{Q}t}\right)U(t) - e^{-2\tau}\left(1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)}\right)U(t-t_f)\right] \tag{4.131}$$
$$-\frac{r_0 L I_0}{2}\left(-\frac{\omega e^{-2\tau}}{Q(1-e^{-2\tau})}(t-t_i) + \frac{1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_i)}}{1-e^{-2\tau}}\right)U(t-t_i)$$
$$+\frac{r_0 L I_0}{2}\left(-\frac{\omega e^{-2\tau}}{Q(1-e^{-2\tau})}(t-t_i-t_f) + \frac{e^{-2\tau}(1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_i-t_f)})}{1-e^{-2\tau}}\right)U(t-t_i-t_f),$$

となる。

ここで、$t < t_f$ とすると、次式を得る。これは RF を入力し始めてから、RF が加速器内に充填されるまでの過渡的状態をあらわす。

$$V(t) = \frac{E_0 L}{1-e^{-2\tau}}\left(1-e^{-\frac{\omega}{Q}t}\right), \tag{4.132}$$

RF 入力後、ビーム加速を行わなければ加速電圧は一定となる。この時の加速電圧の時間変化を図 (4.8) にしめす。この例ではシャントインピーダンス $r_0 = 5.7\times10^7\Omega/m$, 加速管長は 3.0m, 群速度平均で $0.015c$ の定勾配型を仮定している。以下、同様のパラメーターを利用する。

式 (4.132) において、$t_i = t_f,\, t_f < t < 2t_f$ とすると、次式を得る。

$$V(t) = E_0 L - \frac{r_0 L I_0}{2(1-e^{-2\tau})}\left[-\frac{\omega}{Q}e^{-2\tau}(t-t_f) + 1 - e^{2\tau-\frac{\omega}{Q}t}\right]. \tag{4.133}$$

この式は、RF 充填が完了すると同時に、ビーム加速を開始した場合の加速電圧の変動を示している。式からわかるように、時間とともに加速電圧は変化し、一定とならない。これがいわゆるビームローディングと呼ばれる現象である。ビーム加速を開始してから、充填時間が経過すると電圧は一定となり、その値は

$$V(t) = E_0 L - \frac{r_0 L I_0}{2(1-e^{-2\tau})}(1-e^{-2\tau}-2\tau e^{-2\tau}), \tag{4.134}$$

である。図 4.9 にその時の加速電圧の時間変化を示す。ここではビーム電流は $3.2/6.151.5 = 0.78A$ としている。

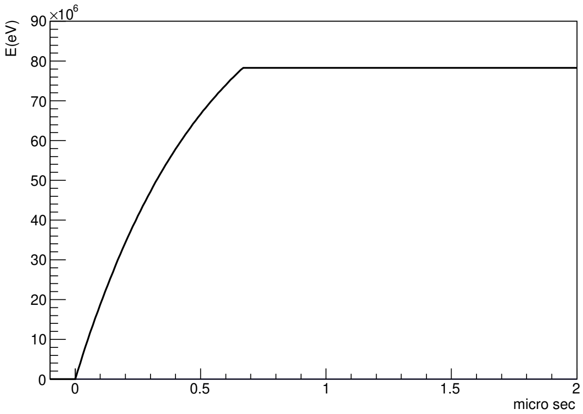


図 4.8　矩形波の RF パルスを印可した場合の加速管一本あたりの加速エネルギー.

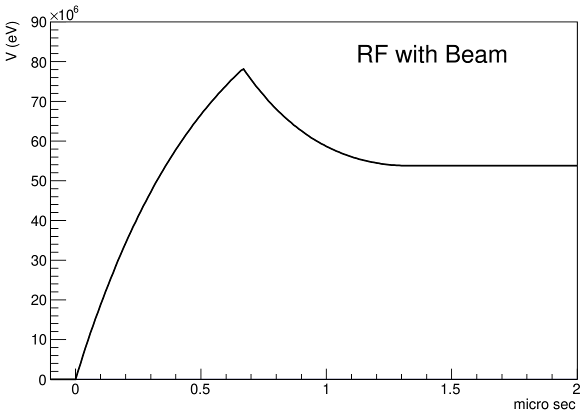


図 4.9　矩形波の RF パルスを印可し, 充填時間後に矩形波のビームを入力した場合の加速管一本あたりの加速エネルギー.　ビームにより　加速電場は減衰するが、ビームによる消費電力を含めてバランスがとれた段階で一定となる。

4.3.2　振幅変調によるビームローディング補正

ビーム加速を開始してから充填時間が経過する間の電圧変化を打ち消すような RF の制御を考える。以下、RF 入力開始後、充填時間が経過した後にビーム加速を開始するものとする。

ビーム加速を開始すると、加速管壁での消費電力に加え、ビームが持ち去る電力だけ消費電力が増えるから、それを補うように入力 RF パワーを増大させなくてはならない。そこで RF 入力を電圧にして次のように変化させる。

$$E(t) = E_0 U(t) + E_1 U(t - t_f), \tag{4.135}$$

すなわち、加速電場は $t = t_f$ で不連続的に E_1 だけ増加させる。この時、E_1 の値は、ビーム加速する直前に生じていた加速エネルギー、すなわち $E_0 L$ をビームローディングのある状態で再現するような値に設定する。

この時、前節と同様に加速電圧を求める。電圧のラプラス変換は

$$E(s) = \frac{E_0}{s} + \frac{E_1}{s} e^{-st_f}, \tag{4.136}$$

となる。これを式に代入すると

$$\begin{aligned} V(s) = &\frac{\omega L}{Q(1-e^{-2\tau})} \frac{1}{s+\omega/Q} \left(\frac{E_0}{s} + \frac{E_1}{s} e^{-st_f} \right) \left(1 - e^{-(s+\omega/Q)t_f} \right) \\ &- \frac{\omega r_0 L}{2Q(1-e^{-2\tau})} \frac{I_0}{s^2} e^{-st_f} \left[1 - e^{-\frac{\omega}{Q} t_f} - \frac{\omega(1-e^{-st_f-2\tau})}{Q(s+\omega/Q)} \right], \end{aligned} \tag{4.137}$$

を得る。この式をラプラス逆変換により時間ドメインに戻して、

$$\begin{aligned} V(t) = &\frac{E_0 L}{1-e^{-2\tau}} \left[\left(1 - e^{-\frac{\omega}{Q} t} \right) U(t) - e^{-2\tau} \left(1 - e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)} \right) U(t-t_f) \right] \\ &+ \frac{E_1 L}{1-e^{-2\tau}} \left[\left(1 - e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)} \right) U(t-t_f) - e^{-2\tau} \left(1 - e^{-\frac{\omega}{Q}(t-2t_f)} \right) U(t-2t_f) \right] \\ &- \frac{r_0 L I_0}{2(1-e^{-2\tau})} \left(-\frac{\omega e^{-2\tau}}{Q}(t-t_f) + 1 - e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)} \right) U(t-t_f) \\ &+ \frac{r_0 L I_0}{2(1-e^{-2\tau})} \left(-\frac{\omega e^{-2\tau}}{Q}(t-2t_f) + \quad e^{-2\tau}(1 - e^{-\frac{\omega}{Q}(t-2t_f)}) \right) U(t-2t_f), \end{aligned} \tag{4.138}$$

を得る. ここで $t_f < t < 2t_f$ とすると、

$$V(t) = E_0 L + \frac{L E_1}{1-e^{-2\tau}} \left(1 - e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)} \right) - \frac{r_0 L I_0}{2(1-e^{-2\tau})} \left[-\frac{\omega}{Q} e^{-2\tau}(t-t_f) + 1 - e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)} \right], \tag{4.139}$$

を得る。この時、ビームが無い状態と加速電圧を同じにするために、次の条件を満足するように E_1 を決定する。

$$E_1 = \frac{r_0 I_0}{2} \left(\frac{2\tau e^{-2\tau}}{1-e^{-2\tau}} - 1 \right), \tag{4.140}$$

この時の結果を図 4.10 にしめす。破線がビーム加速しない場合に発生する加速電圧、破線がビームによる電圧降下（ビームローディング）、そして実線がビーム加速した場合の加速電圧を表す。また、その時の入力 RF の変調の様子を図 4.11 に示す。この結果から明らかなように、ビーム加速を開始してから充填時間が経過した後は、RF パワーを増大させたことにより、ビームによる消費電力を補い、加速電圧が一定となっている。しかしビーム加速を開始してから充填時間が経過する間、過渡的な加速電圧の変動が見られる。これはビーム加速を開始した時点では加速管に充填されているパワーは、ビームが無い状態で所定の電場を維持する値であり、ビーム加速でパワーが食われることにより電場は減少する。しかし振幅を増大させた RF の充填が進むにつれて、電場はビーム加速前の値に戻っていく。

この過渡的なビームローディングを抑制し、完全にビーム加速電圧を一定にするには、上で行ったビームと同期したような矩形波の振幅変調に加え、振幅を増大させた RF が充填されるまでの過渡的状態を補償する波形を加えなく

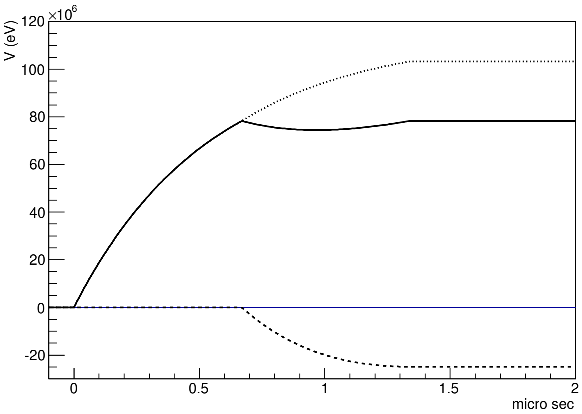


図 4.10　ビーム入射と同時に、RF の振幅を増大させた場合の加速エネルギーの変化。ビーム加速を開始してから充填時間が経過した後は、加速開始直前の加速電圧に回復しているが、一時的な電圧低下が生じる。

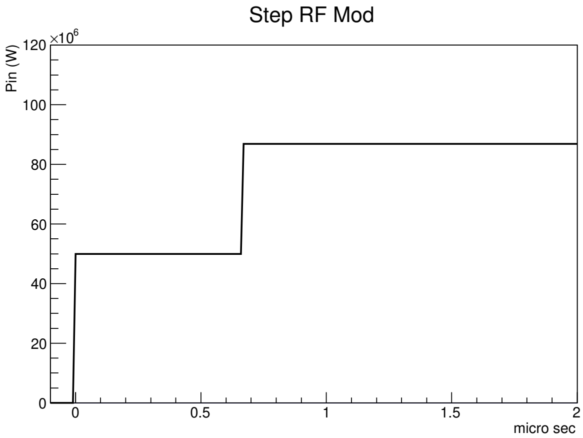


図 4.11　RF パワー入力変調の様子。ビーム加速と同時にパワーを階段関数的に増大させる。

てはならない。加える波形は、ビーム加速開始から充填時間が経過した後にはゼロとなる必要がある。式 4.139 をよく見ると、ビームによる電圧変動成分は、指数関数項と線形項からなる。これに対して、矩形波の変調項は指数関数項のみを含むため、補償が不完全であることがわかる。ビームローディング由来の二つの項を補償するために、矩形波に加えて、線形の振幅変調が必要である。具体的には RF 入力を電圧にして次のように変化させる。

$$E(t) = E_0 U(t) + E_1 U(t-t_f) + E_2(t-t_f)U(t-t_f) + E_2(t-2t_f)U(t-2t_f), \tag{4.141}$$

すなわち、加速電場は $t = t_f$ で不連続的に E_1 だけ増加させ、さらに時間の一時関数で振幅 E_2 でランプさせる。図 4.12 にその様子をしめす。E_2 の次元は電場/時間である。これらのラプラス変換は

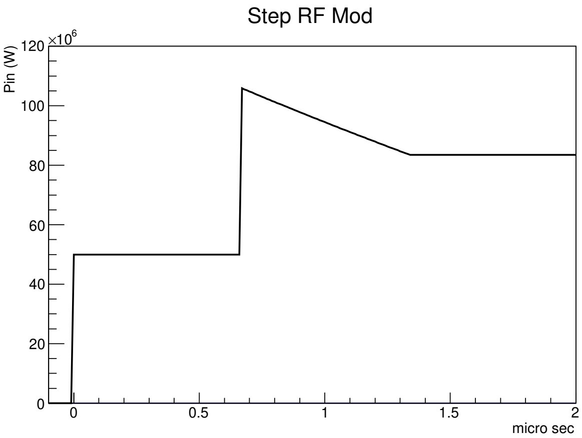


図 4.12　追加波形を加えた振幅変調の様子を入力パワーで表した。ステップ状の矩形波変調に加えて、線形の項を加えている。

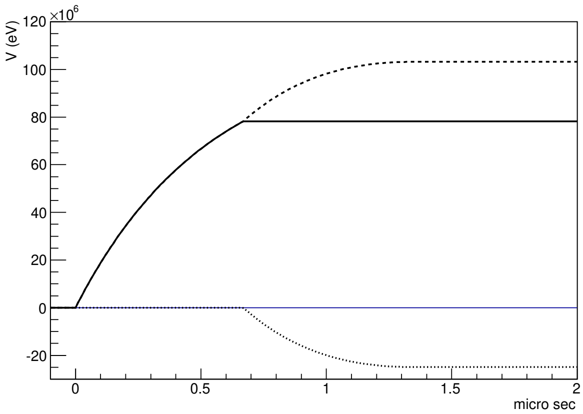


図 4.13　追加波形を加えた振幅変調による加速電圧の変化。過渡的ビームローディングを完全に抑制して、均一な加速を実現している。

$$E(s) = \frac{E_0}{s} + \frac{E_1}{s} e^{-st_f} + \frac{E_2}{s^2} e^{-st_f}, \tag{4.142}$$

となる。計算が煩雑となるので、最後の項はとりあえず無視する。これを式に代入すると

$$V(s) = \frac{\omega L}{Q(1-e^{-2\tau})}\frac{1}{s+\omega/Q}\left(\frac{E_0}{s}+\frac{E_1}{s}e^{-st_f}+\frac{E_2}{s^2}e^{-st_f}\right)\left(1-e^{-(s+\omega/Q)t_f}\right) \\ -\frac{\omega r_0 L}{2Q(1-e^{-2\tau})}\frac{I_0}{s^2}e^{-st_f}\left[1-e^{-\frac{\omega}{Q}t_f}-\frac{\omega(1-e^{-st_f-2\tau})}{Q(s+\omega/Q)}\right], \tag{4.143}$$

を得る。この式をラプラス逆変換により時間ドメインに戻して、

$$\begin{aligned} V(t) = {} & \frac{E_0 L}{1-e^{-2\tau}}\left[\left(1-e^{-\frac{\omega}{Q}t}\right)U(t)-e^{-2\tau}\left(1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)}\right)U(t-t_f)\right] \\ & +\frac{E_1 L}{1-e^{-2\tau}}\left[\left(1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)}\right)U(t-t_f)-e^{-2\tau}\left(1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-2t_f)}\right)U(t-2t_f)\right] \\ & +\frac{E_2 L e^{2\tau}}{1-e^{-2\tau}}\left[(t-2t_f)-\frac{Q}{\omega}\left(1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-2t_f)}\right)\right]U(t-2t_f) \\ & -\frac{r_0 L I_0}{2(1-e^{-2\tau})}\left(-\frac{\omega}{Q}e^{-2\tau}(t-t_f)+1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)}\right)U(t-t_f) \\ & +\frac{r_0 L I_0}{2(1-e^{-2\tau})}\left(-\frac{\omega}{Q}e^{-2\tau}(t-2t_f)+e^{-2\tau}(1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-2t_f)})\right)U(t-2t_f), \end{aligned} \tag{4.144}$$

を得る. ここで $t_f < t < 2t_f$ とすると、

$$V(t) = E_0 L + \frac{L}{1-e^{-2\tau}}\left(E_1-\frac{Q}{\omega}E_2\right)\left(1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)}\right)+\frac{Le^{-2\tau}}{1-e^{-2\tau}}E_2(t-t_f) \\ -\frac{r_0 L I_0}{2(1-e^{-2\tau})}\left[-\frac{\omega}{Q}e^{-2\tau}(t-t_f)+1-e^{-\frac{\omega}{Q}(t-t_f)}\right], \tag{4.145}$$

を得る。この時、次の条件を満足するように E_1 および E_2 を決定すると、式 (4.146) における時間変化は打ち消される。

$$E_1 = \frac{r_0 I_0}{2}(1-e^{-2\tau}), \tag{4.146}$$

$$E_2 = -\frac{r_0 I_0}{2}\frac{\omega}{Q}e^{-2\tau}, \tag{4.147}$$

すると、加速電圧は

$$V(t) = E_0 L + \frac{L}{1-e^{-2\tau}}\left(E_1-\frac{Q}{\omega}E_2\right)-\frac{r_0 L I_0}{2(1-e^{-2\tau})} = E_0 L, \tag{4.148}$$

となり、時間に依存しない。図 4.13 にその結果を示す。破線がビーム加速しない場合の加速電圧、点線がビームによる電圧降下、そして実線がビーム加速した場合の電圧である。図 4.12 に示したような振幅変調をかけることで、過渡的ビームローディングを完全に抑制できていることがわかる。

ビームパルスが終了し、ビーム負荷が無くなると加速電圧は上昇を始めるので、ビームパルス終了の時点で入力 RF を P_0 に戻す必要がある。しかしその場合でも、加速電圧が $E_0 L$ にもどるには充填時間が必要で、その間はやはり過渡的な電圧変動が見られる。次のパルスが開始されるまでのパルス間隔が充填時間以上あれば問題ないが、次のパルスまでの間隔が充填時間より短い場合は、加速エネルギーを均一化するためにはこの過渡的変動を補償しなければならない。この場合、ビーム加速開始の場合に生じる過渡的変動とは符号が逆となるので、

$$E(t) = E_0 U(t) + E_2(t-t_e)U(t-t_e) - E_2(t-t_e-t_f)U(t-t_e-t_f), \tag{4.149}$$

という変調をかければよい。ここで t_e はビームパルスが終わる時間である。このような変調をかけておけば、次のパルスの開始時点で加速管に生じている電場の積分値、すなわち加速電圧は最初のパルス開始前の状態と同じであるから、あとは同じ RF 変調を繰り返せばよい。

第 5 章

ビーム計測

ビームは加速器中を進行するが、一般的にその形状などを計測するのは容易ではない．通常はビームを特定の平面は軸に射影した成分が測定可能に過ぎない．得られた計測結果からビーム形状を求めるには測定結果のビーム力学に基づいた解析が必要となる．それをここで述べる．

5.1 ビームエミッタンスの測定

ビームエミッタンスの測定法にはいくつか種類があるが, ここでは Q スキャン法を紹介する．

Q スキャン法とは, ビームライン上におかれた四重極磁石 (Q 磁石) の強さの関数として下流におけるビームサイズを測定し, その変化からエミッタンスを測定する方法である．上流側から Q 磁石, ドリフト空間, そしてビーム計測地点がならぶ．各々のビーム輸送行列を掛け合わせて, 全体のビーム輸送は

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ -K & 1-KL \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

となる．ビームの形状をあらわす Σ 行列は次のように定義される．

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Σ 行列は常に対照行列となる．ビーム形状が加速器の設計から決まる Twiss パラメーターと相似である場合, 各々の行列要素は次のように Twiss パラメーターと関係する．

$$\sigma_{11} = \beta\varepsilon \tag{5.3}$$
$$\sigma_{22} = \gamma\varepsilon \tag{5.4}$$
$$\sigma_{12} = -\alpha\varepsilon \tag{5.5}$$

Σ 行列は位相空間上の楕円を二次同次形式で表したもので

$$\begin{pmatrix} x & x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = 1 \tag{5.6}$$

である．因みに $det\Sigma = \varepsilon^2$ と行列式はエミッタンスを与える．

ビーム輸送における Σ 行列は、上式における粒子ベクトルを輸送すれば求めることができる．

$$\begin{pmatrix} x & x' \end{pmatrix} \boldsymbol{M}^t \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = 1 \tag{5.7}$$

すなわち、輸送後の Σ 行列は

$$\left(\boldsymbol{M}^t \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{M} \right)^{-1} = \boldsymbol{M\Sigma M}^t \tag{5.8}$$

となる．この式に Q スキャンの輸送行列を代入すれば，ビーム計測地点での Σ 行列が求められる．そのうち σ_{11} がビームサイズを表すからこれを記すと

$$\sigma_{11} = (1-KL)^2\sigma_{11} + 2L(1-KL)\sigma_{12} + L^2\sigma_{22} \tag{5.9}$$

となる．左辺の σ はビーム計測地点での値，右辺の σ は Q 磁石の場所での値である．σ_{11} はビームサイズの二乗であるからこれを R^2 と置くと

$$R^2(K,L) = L^2\sigma_{11}\left[K - \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} + \frac{1}{L}\right)\right]^2 + \frac{L^2}{\sigma_{11}}\varepsilon^2 \tag{5.10}$$

が得られる．すなわち，ビーム計測地点でのビームサイズの二乗を Q の強さ K の関数として表示するとある値で最小値をとる．その時の最小値の値を R_{min}，K の二乗項の係数を A とするとエミッタンスは

$$\varepsilon^2 = \frac{R_{min}A}{L^4} \tag{5.11}$$

と得られる．

エミッタンスが計測可能な条件は，ビーム計測地点において K の可能な値において極小値が得られることである．極小値を与える K の値は

$$K = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} + \frac{1}{L} \tag{5.12}$$

である．多くの場合は K が正の時に極小値をとることが可能となる．上の変数のうち，正負の値をとりうるものは σ_{12} のみである．Twiss パラメーターで条件を示すと

$$\alpha < \frac{\beta}{L} \tag{5.13}$$

となる．

第 6 章

電子の放射現象

電子は質量 $0.51MeV/c^2$ と素粒子の中ではニュートリノをのぞくと一番軽く, かつ荷電粒子であるために加減速されることにより, 容易に放射現象を生じる. 電子ビームを物質に打ち込むと, 物質内の電磁場により電子は急ブレーキをかけられた状態となり, それにより電磁波を放射する. この現象を Bremsstrahlung と呼ぶ. また, 電子は磁場により円運動をするが, その際に働く向心力により電磁波を放射する. これをシンクロトロン放射 (Synchrotron Radiation) という. さらに, 電子と陽電子を衝突させる高エネルギーコライダーにおいては, 相手の粒子のつくる電磁場によって粒子の軌道がやはり曲げられ, その運動により放射現象が生じる. これを Beamstrahlung という.

電子の生じるこれらの放射現象は, ある場合は利用され, ある場合は克服すべき問題となる. いずれにしろ, これらの現象を定量的に評価し, 予期されたビーム性能が得られるかどうか見通しをつけることが高エネルギー加速器実験においては重要であり, ビーム物理の目的のひとつである.

まず, 最初にこれらの放射現象が実際の加速器においてどのような役割を果たしているのか概観し, その後詳細な検討に入る. 加速粒子としては電子および陽電子を仮定する. 陽子やミューオンなどの質量の重い粒子でも原理的に放射現象は生じるが, その効果は電子に比べて桁違いに小さく, 問題にならないからである.

電子は加速されると放射現象を生じると述べたが, 以下に述べるように加速が進行方向にたいして平行な場合の放射は, 垂直な場合に比べて桁違いに小さい. 粒子を加速する場合は加速方向は常に進行方向に平行なので, 加速時における放射現象はあまり問題にならない. 放射が顕著になるのは, 進行方向に対して加速が垂直な場合, すなわち磁場により粒子の進行方向を変える場合である. 電子蓄積リングでは電子は閉軌道の中を周回するので, ほぼ常に横方向に加速されながら円軌道を描く. この際に放射されるのがシンクロトロン放射, シンクロトロン光である. シンクトロン放射光施設ではこの光を利用して, 分析に用いることで物性物理学, 物質化学, 生命科学などの研究を行っている.

このシンクトロン放射はエネルギーの散逸仮定であるから, 適切な条件を整えてやることでビームの乱雑な熱運動を減少させる, つまり減衰させる効果をもつ. これを Radiation Damping と呼び, 電子蓄積リング中ではビームのエネルギー広がりやエミッタンスなどが減少する. これを利用して超低エミッタンスビームを生成するのが, Linear Collider における Damping ring である. ILC の Damping Ring では, 発生時に 10πmm.mrad 程度であった横方向 (xy 対称) エミッタンスを, $0.02-4\pi$mm.mrad(x-y) まで放射減衰を利用して減少させる. 超低エミッタンスビームはリニアコライダー実現の鍵となるものであり, そこにシンクロトロン放射がつ強く関わっているのである.

シンクトロン放射は放射減衰によりエミッタンスを減少させる一方, 量子励起を通じてエミッタンス増大も生じさせる. これは一見矛盾するようであるが, 以下にみるようにひとつの現象を古典的にみるか, 量子論的にみるかの違いである. シンクロトロン放射を連続的すなわち古典的な現象としてみなせる場合には減衰が支配的に働き, シンクトロン放射を非連続的な量子的な現象とみなせる場合には量子励起が支配的に働く. Damping Ring において, 両者の効果が均衡したところが平衡状態であり, その時のエミッタンスを平衡エミッタンスと呼ぶ. ILC のダンピングリングではこの平衡エミッタンスが目的とする値になるようにリングが設計されている.

この量子励起過程は, 磁場のあることろで粒子が曲げられるたびに働き, エネルギー広がりやエミッタンスを増大させる. 通常はビーム自身の広がりがその効果に比べて大きいので, あまり顕著には表れないが, ダンピングリングで

生成された超低エミッタンスビームではこのような効果は無視できない．ダンピングリングで作った超低エミッタンスビームを輸送するために，放射の量子励起による効果を見積り，それを抑える工夫が必要である．このような工夫は他の超低エミッタンスビームを扱う次世代放射光源, FEL(Free Electron Laser), ERL(Energy Recovery Linac), Laser Compton X-ray Source などにおいて課題となる．

コライダーにおいては，最初に少し触れたが，衝突時に相手のビームの作る電磁場でビームが加速され，それによる放射が生じる．これを Beamstrahlung という．Beamstrahlung により電子あるいは陽電子はエネルギーを失うため，結果として衝突現象におけるエネルギー広がりの増大が生じてしまう．これによりコライダー実験における始状態の不定性が大きくなることになり，実験精度の低下につながるため，抑制する必要がある．

最後に，物質中の電磁場との相互作用により生じる Bremsstrahlung であるが，この現象は例えば陽電子ビームを生成する際に用いられている．陽電子は自然界にはほとんど存在しないが，これをつくるひとつの方法は数 GeV の高エネルギー電子を物質に打ち込み，そこで生じる電磁シャワー現象から陽電子を取り出す方法である．物質中で電子は原子核の電場により減速され，Bremsstrahlung によりガンマ線を放出する．放出されたガンマ線は，やはり原子核の電磁場との相互作用により対生成反応を起こし，電子と陽電子が発生するのである．

以上のように，電子加速器においては様々な放射現象が生じる．ある場合はその現象が積極的に利用されるが，ある場合にはやっかいな問題として邪魔者扱いされる．いずれにしろ，それらの現象の特性を理解することが必要となる．

6.1　放射の基礎過程

放射は純粋に量子力学的な過程であるが，古典電磁気学の範疇において，類推的に理解することができる．放射はエネルギーの流れであるから，放射が存在する場所ではエネルギーの流れを意味する Poynting vecor が存在する．Poynting vector は電場と磁場のベクトル積で次のように与えられる．

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}, \tag{6.1}$$

ここで $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ は各々電場，磁場，磁束密度である．よく知られているように，電荷が静止，あるいは等速運動をしている場合，ポインティングベクトルは至るところでゼロであるが，加減速をおこなうと電気力戦の磁場に直交する成分が発生し，ポインティングベクトルが発生し，電磁エネルギーの流れが発生する．粒子が放射するパワー P を粒子の静止系において求めると [19]

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{m^2c^3}\left(\frac{dp^*_\mu}{d\tau}\frac{dp^{*\mu}}{d\tau}\right), \tag{6.2}$$

となる．ここで p^*_μ 等は粒子四元ベクトルであり，その固有時間 τ での微分は粒子の静止系での加速度ベクトルである．ローレンツ変換において四元運動量は保存するから，これを実験室系で観測すると，

$$\frac{dp^*_\mu}{d\tau}\frac{dp^{*\mu}}{d\tau} = \left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2 = \gamma^2\left[\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2\right], \tag{6.3}$$

となる．これを式 (6.2) に代入し，整理すると，

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c}\gamma^6\left(\dot{\beta}^2 - [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]\right), \tag{6.4}$$

と，実験室系における放射パワーを求めることができる．

前章で述べたように，相対論的には粒子が進行方向に対して平行に加減速される場合と，垂直に加減速される場合ではみかけの質量が異なる．みかけの質量が異なるということは，うける力が同一でも生じる加速度が異なることを示しており，それにより生じる放射パワーも加速方向によって異なる．粒子の進行方向に対して平行および垂直な加減

速による放射エネルギーおのおのは

$$P_{\parallel} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c}\gamma^6\dot{\beta_{\parallel}}^2 \tag{6.5}$$

$$P_{\perp} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c}\gamma^4\dot{\beta_{\perp}}^2 \tag{6.6}$$

となる．速度 β と運動量との間の関係は

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \gamma^3 m\dot{\beta}_{\parallel}c \tag{6.7}$$

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \gamma m\dot{\beta}_{\perp}c, \tag{6.8}$$

であるから, 放射量を運動量変化で表すと,

$$P_{\parallel} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{m^2c^3}\left(\frac{dp_{\parallel}}{dt}\right)^2 \tag{6.9}$$

$$, P_{\perp} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{m^2c^3}\gamma^2\left(\frac{dp_{\perp}}{dt}\right)^2, \tag{6.10}$$

となる．電磁場により運動量変化が生じるとすると, 各々の成分は

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = eE \tag{6.11}$$

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = e\beta cB, \tag{6.12}$$

となる．本来電磁場等はベクトルであるが, ここではその大きさを表す．ここで運動方向にたいして平行な方向の加減速による放射量と, 垂直な方向の加減速による放射量を比べると, おおまかにいって γ^2 程度垂直方向のほうが大きいことがわかる．従って放射の効果を考える場合, その影響はほぼ進行方向にたいして垂直の加速による成分が支配的である．これ以降は $P_\gamma \sim P_\perp$ として, シンクロトロン放射の成分として垂直成分のみを考える．Beam rigidity

$$B\rho = \frac{\beta E}{ce}, \tag{6.13}$$

を用いて, 式 (6.10) を書き換えると, 放射量 P_γ は

$$P_\gamma = \frac{2}{3}e^2c\frac{\beta^4\gamma^4}{\rho^2}, \tag{6.14}$$

と表される．ここで電子を仮定して, $q = e$ とした．この式を実用単位系で記述すると,

$$P_\gamma(GeV/s) = \frac{cC_\gamma}{2\pi}\frac{E^4}{\rho^2}, \tag{6.15}$$

ここで

$$C_\gamma = \frac{4\pi}{3}\frac{r_c}{m^3c^6} = 8.8575\times 10^{-5}(mGeV^{-3}), \tag{6.16}$$

である．ここで求めた P_γ は単位時間あたりの放射量である．回転半径 ρ, すなわち蓄積リングにおける周長が一定の場合, その放射量はエネルギーの四乗に比例することがわかる．これを周回時間について積分すると, リングを一周する間の放射量が得られる．

$$\int P_\gamma dt = \int P_\gamma\frac{ds}{\beta c} = \frac{C_\gamma E^4}{2\pi\beta}\int\frac{ds}{\rho^2}, \tag{6.17}$$

電子の回転半径 ρ が一定の場合は, 積分が実行できる．

$$\Delta E(GeV) = \frac{C_\gamma E^4}{\beta\rho}, \tag{6.18}$$

となる．この式は電子ひとつについての放射エネルギーである．多数の電子による放射を求めるため, 周回する電流量を I とおくと, $I = ef_{rev}N_e$, $f_{rev} = \beta c/2\pi\rho$ なので, 電流を用いて周回するすべての電子についての放射エネルギーの総量は

$$P_\gamma = \frac{\Delta E}{e} I, \tag{6.19}$$

とおける．例えばシンクロトロン放射光の放射エネルギーは電流に比例し, ビームエネルギーの四乗に比例する．

6.2　Wiggler と Undulator

Wiggler 磁場は電子の進行方向に対して直角な磁場が交番しているものである．電子はその磁場中で進行方向を変化させるが, 磁場が交番しているので, 実質的な軌道変化は生じない．逆に Wiggler 磁場をつくる場合は, 通過の前後で粒子軌道が変化せず, 閉軌道を形成している必要がある．その条件は

$$\int B_y(s) ds = 0, \tag{6.20}$$

というものである．ここでは磁場は y 方向にあるものとしている．磁場のプロファイルは磁石のポール形状などによるが, 正弦波的な場合は

$$B_y(x, y = 0, s) = B_0 \sin\left(2\pi \frac{s}{\lambda_p}\right), \tag{6.21}$$

と表現される．ここで λ_p は周期長で, 実際の磁石の配列においては周期長あたり二組の偏向磁石が配置される．一組の偏向磁石を 1pole と呼び, その半分を a half pole と呼ぶ．A half pole あたりの電子軌道の曲げ角は

$$\theta = \frac{B_0}{B\rho} \int_0^{\lambda_p/4} \sin\left(2\pi \frac{s}{\lambda_p}\right) ds = \frac{B_0}{B\rho} \frac{\lambda_p}{2\pi}, \tag{6.22}$$

となる．ここで $B\rho$ は Beam rigidity で, 式 (6.13) で与えられ, ビームエネルギーで決まる量である．この式より Wiggler 中での軌道半径 ρ は

$$\rho = \frac{1}{B_y(s)} \frac{\beta E}{ce}, \tag{6.23}$$

と与えられる．これより, Wiggler 中でのシンクロトロン放射が求められる．交番磁場の特性を決める量に K 値と呼ばれるものがある．

$$K = \gamma\beta\theta = \frac{eB_0}{mc} \frac{\lambda_p}{2\pi}. \tag{6.24}$$

厳密には, 交番磁場は Wiggler と Undulator にわけられ, その指標となるのがこの K 値である．$K \gg 1$ の場合, その交番磁場は Wiggler と呼ばれ, $K \leq 1$ の時に Undulator と呼ばれる．

シンクロトロン放射は電子の軌道に対して, およそ $1/\gamma$ の角度広がりをもって放射される．交番磁場による電子の軌道の広がりはおよそ A half pole によるものに等しいから, この広がり角がシンクロトロン放射の広がり角より小さい場合, 各ポールから発生するシンクロトロン光の干渉が生じる．具体的には干渉作用により, 一周期に電子が走る距離と光との行路差が波長の整数倍になるという条件の場合に光が強められる．この時の発生する波長は, 電子の運動が一平面にある Planar Undulator の場合,

$$\lambda_\gamma = \frac{\lambda_p}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{1}{2} K^2\right), \tag{6.25}$$

となる．これを実用単位系で表すと,

$$\lambda_\gamma(\AA) = 13.056 \frac{\lambda_p(cm)}{E^2(GeV^2)} (1 + \frac{1}{2} K^2) \tag{6.26}$$

$$\epsilon_\gamma(eV) = 950 \frac{E^2(GeV^2)}{\lambda_p(cm)(1 + \frac{1}{2} K^2)}, \tag{6.27}$$

である．

6.3 Quantum excitation

シンクロトロン放射は量子過程であるから, 実際の放射は離散的かつ確率的に生じる. 従って, 式 (6.18) であらわされるような平均的なエネルギー減少だけでなく, エネルギーの二次のモーメント (広がり) の増大という現象がおきる. このようにシンクロトロン放射の量子確率過程に起因する現象の総称を量子励起 (Quantum excitation) という.

量子励起によるエネルギー広がりの増大を理解するために, 初期状態としてある決まったエネルギー E をもった電子の集合を考える. これらの電子が単位時間あたり N 個のエネルギー ε の光子を放出したとする. この時に生じるエネルギー広がりの平均値は

$$\Delta E = \sqrt{N}\varepsilon, \tag{6.28}$$

で与えられる. したがって, 単位時間あたりの光子の平均的な放出数と平均エネルギーから, 発生するエネルギー広がりを求めることができる. シンクロトロン放射が連続的に生じる場合は, この式において $N \to \infty$ の極限に相当する.

放射パワー P は一定であるから, $\varepsilon = P/N$ でスケールする. したがって ΔE は $1/\sqrt{N}$ にスケールし, 古典的極限でエネルギー広がりが発生しないことが納得できる.

量子励起によるエネルギー広がりを求めよう. 電磁量子力学によると, 時間あたりに放射されるシンクロトロン放射光の光子数とその平均エネルギーの二乗の積は

$$N_{ph}\langle\epsilon^2\rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} P_{\gamma 0}\epsilon_c, \tag{6.29}$$

ここで, ϵ_c は critical energy であり, 次の式で与えられる

$$\epsilon_c = \hbar\omega_c = \frac{3}{2}c\hbar\frac{\gamma^3}{\rho}, \tag{6.30}$$

これらを代入すると,

$$N_{ph}\langle\epsilon^2\rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} e^2 c^2 \hbar \frac{\beta^4\gamma^7}{\rho^3}, \tag{6.31}$$

を得る.

あるエネルギーをもったビームを偏向磁場やウイグラーなどのシンクロトロン放射を生じるビーム輸送ラインを通過させることを考える. その時, 式 (6.31) に従ってエネルギー幅は増大してゆく. その値はエネルギーの二乗で規格化すると,

$$\frac{\Delta E^2}{E^2} = \int \frac{N_{ph}\langle\epsilon^2\rangle}{E^2} dt = \int \frac{ds}{\beta c}\frac{55}{24\sqrt{3}}\frac{e^2 c\hbar}{m^2c^4}\frac{\beta^3\gamma^5}{\rho^3}, \tag{6.32}$$

となる.

また, 量子励起はエネルギー広がりだけでなく, 横方向のエミッタンス増大にも寄与する. シンクロトロン放射は進行方向に対しておよそ $1/\gamma$ の広がりをもって放射されるが, 一般的にこの値は非常に小さくなるため, ここではそのひろがりを無視することにしよう. そうすると, シンクロトロン放射によりエネルギーが減少するだけで, 横方向の運動にはまったく影響しないように思える. しかし現実にはシンクロトロン放射により横方向のエミッタンス増大が生じる. それをこれから説明する.

シンクロトロン放射が生じる場所は偏向磁場のある場所であるから, 一般的に dispersion はゼロではない. Dispersion とは電子の運動量が異なる場合に, その電子の軌道がどの程度ずれるのかを表す量であり, 基準粒子の軌道からのずれで表される. 今, 運動量 cp_1 をもつ粒子が横方向の位相空間で (x, x') で表されるベータトロン振動をしているとしよう. 粒子の運動は基準粒子（運動量 cp_0）の軌道を基準とした軌道のずれ（Dispersion) と横方向の運動量による振動（ベータトロン振動）の和である. それを示すと

$$x = \eta\frac{cp_1 - cp_0}{cp_0} + x_{\beta 1}, \tag{6.33}$$

となる．$x_{\beta 1}$ は運動量 cp_1 の時のベータトロン運動である．すなわち実際の横方向位置は基準運動量からのずれで生じる dispersion の成分と, 横方向運動量で生じるベータトロン運動の成分の和となっている．今, シンクロトロン放射が生じて, 運動量が cp_2 に変化したとしよう．運動量が変化しても位置は変化しないから,

$$x = \eta \frac{cp_1 - cp_0}{cp_0} + x_{\beta 1} = \eta \frac{cp_2 - cp_0}{cp_0} + x_\beta, \tag{6.34}$$

が成り立つ．これより次の式を得る．

$$\Delta x_\beta = x_{\beta 2} - x_{\beta 1} = \eta \frac{cp_1 - cp_2}{cp_0}, \tag{6.35}$$

すなわち, 粒子の位置は変化しないものの, 運動量変化により Dispersion の量が変化し, それに従ってベータトロン振動の振幅が変化するのである．別の言葉でいえば, ベータトロン振動とは, ある運動量の粒子が横方向運動量をもたない時につくる軌道を基準にして, その軌道まわりの振動運動として記述される．ある瞬間に運動量が変化すると, 基準となる軌道が変化するので, 結果としてベータトロン振幅は変化するのである．

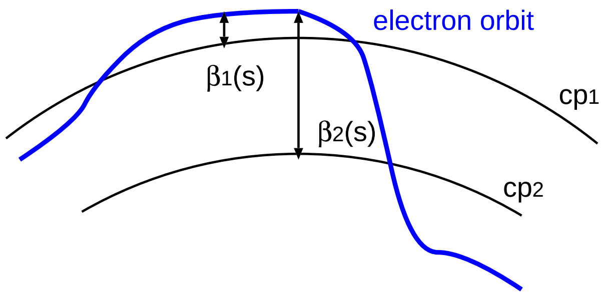


図 6.1　量子励起によるベータトロン振幅の増大．

ベータトロンの位置座標だけではなく, 運動量成分 x' についても同様な議論が成り立つ．これをまとめると,

$$\Delta x_\beta = -\eta \frac{cp_1 - cp_2}{cp_0} = 0 \tag{6.36}$$

$$\Delta x'_\beta = -\eta' \frac{cp_1 - cp_2}{cp_0} = 0, \tag{6.37}$$

となる．この変化が全ての粒子に確率的に生じるので, Twiss parameter で記述された位相空間分布

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta u'^2 = a^2, \tag{6.38}$$

の面積に相当するエミッタンスの増加分は

$$\langle \Delta\epsilon \rangle = \left(\frac{cp_1 - cp_2}{cp_0} \right)^2 \left(\gamma\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2 = \frac{\Delta E}{E_0^2} \mathcal{H}(s) \right), \tag{6.39}$$

となる．最後の項で運動量の変化はエネルギーにほぼ等しいとして近似している．積分をとると, リング一周あたりのエミッタンスの増大量は

$$\Delta\epsilon = \frac{1}{\beta c E^2} \int \dot{N_{ph}} \langle \epsilon^2 \rangle \mathcal{H}(s) ds, \tag{6.40}$$

としてあたえられる．

6.4　Radiation Damping

これまでシンクロトロン放射によるエネルギー損失, およびエネルギー広がりおよび横方向エミッタンスの増大について述べた．しかしシンクロトロン放射はエネルギー広がりの減少, 横方向エミッタンスの減少という効果を持つことが知られている．これらの効果をダンピング効果と呼ぶ．

同一の物理過程がエネルギー広がりおよび横方向エミッタンスの増大と減少という,　全く相反する効果を及ぼすことはあまり想像できない. しかしエネルギー量子の大きさ (ここではシンクロトロン光子の持つエネルギー) が, 考えている物理量に対して無視できるほど小さい場合には, 量子力学的な効果は極めて小さく, 古典的な近似が成り立つことは一般的な物理系においてよく見られる現象である. ビームのエネルギー自身は光子のエネルギーに比べてかなり大きいので,　量子力学的な効果が効いてくるのはビームのエネルギー広がりが光子エネルギーと同程度の大きさとなった場合である.

結果を先取りすると, エネルギー広がりが光子のエネルギーに比べて大きい場合, シンクロトロン放射は連続過程として取り扱うことができ, エネルギー広がりは減少していく. まずそれを説明しよう. シンクロトロン放射の放射量は式 (6.18) で示されているように, エネルギーの四乗に比例する. つまり高いエネルギーをもった粒子はより多くのエネルギーを失う. もちろんビーム全体のエネルギー平均もシンクロトロン放射により低下するが, 蓄積リングにおいてはエネルギーを一定に保つために RF 加速空洞が設置されており, ビーム平均エネルギーは放射と再加速のバランスの上に一定に保たれている. 個別の粒子をみるとシンクロトロン振動をしているので, 時間的に平均をとれば RF による加速量はどの粒子でも一定となる. 結局大きなエネルギーをもった粒子はエネルギー損失が大きく, 小さいエネルギーを持った粒子はエネルギー損失が小さいため, 粒子のエネルギーは一周あたりの放射エネルギーと再加速がバランスした平衡状態に近づいてゆく. この現象を放射減衰という.　シンクロトロン振動の減衰時間 ($1/e$ となる時間) は

$$\alpha_s = -\frac{1}{2T_0}\frac{dU}{dE}|_{E_0}, \tag{6.41}$$

と与えられる. ここで U はリング一周あたりのシンクロトロン放射によるエネルギー損失,　T_0 は一周あたりの周回時間である. 時間あたりのシンクロトロン放射量 P_γ で表すと,

$$\alpha_s = -\frac{1}{2}\frac{dP_\gamma}{dE}|_{E_0}, \tag{6.42}$$

となる. P_γ は式 (6.15) で与えられるので, このエネルギーによる全微分が求められれば, 減衰時間が求められる. $P_\gamma \propto E^2 B^2$ よりおのおの偏微分は

$$\frac{\partial P_\gamma}{\partial E} = 2\frac{P_\gamma}{E}, \tag{6.43}$$

と

$$\frac{\partial P_\gamma}{\partial E} = 2\frac{P_\gamma}{E}, \tag{6.44}$$

のように書ける. 式 (6.15) に軌道長のエネルギー依存性を含めて記述すると,

$$\langle P_\gamma \rangle = \frac{1}{cT_0}\int P_\gamma \left(1 + \frac{\eta}{\rho}\frac{E - E_0}{E_0}\right) ds, \tag{6.45}$$

となる. 両辺のエネルギーによる全微分をとると,

$$\frac{\langle P_\gamma \rangle}{dE} = \frac{1}{cT_0}\int \left(\frac{dP_\gamma}{dE} + P_\gamma \frac{\eta}{\rho}\frac{1}{E_0}\right) ds \tag{6.46}$$

また, 時間あたりの放射量のエネルギー全微分は, 偏微分を用いて

$$\frac{dP_\gamma}{dE} = \frac{\partial P_\gamma}{\partial E} + \frac{\partial P_\gamma}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial E}, \tag{6.47}$$

と表せる. 式 (6.43) および (6.44) を代入して,

$$\frac{dP_\gamma}{dE} = 2\frac{P_{\gamma 0}}{E_0} + 2\frac{P_{\gamma 0}}{B_0}k\eta \tag{6.48}$$

$$= 2\frac{P_{\gamma 0}}{E_0}\left(1 + \rho k \eta\right), \tag{6.49}$$

ここで $E_0 = B_0\rho/\beta \sim B_0\rho$ を用いた．この式を式 (6.46) に代入すると,

$$\frac{\langle P_\gamma \rangle}{dE} = \frac{1}{cT_0}\int \frac{P_{\gamma 0}}{E_0}\left(2 + \eta\rho k + \frac{\eta}{\rho}\right) ds, \tag{6.50}$$

となる．ここで積分の中の第一項がエネルギーの変化による主要項で, 第二項はエネルギーの変化による磁場の変化によるもの, 第三項はエネルギーの変化による軌道長の変化の寄与である．これより, $P_\gamma \sim 1/\rho^2$ の依存性を仮定して,

$$\frac{d\langle P_{\gamma 0}\rangle}{dE} = \frac{\langle P_{\gamma 0}\rangle}{E_0}(2+\theta), \tag{6.51}$$

ここで, θ は次の積分で与えられる．

$$\theta = \frac{\int \frac{\eta}{\rho^3}\left(1 + 2\rho^2 k\right) ds}{\int \frac{ds}{\rho^2}}. \tag{6.52}$$

これらを式 (6.41) に代入すると, シンクロトロン振動の減衰項は

$$\alpha_s = -\frac{1}{2}\frac{\langle P_{\gamma 0}\rangle}{E_0}(2+\theta), \tag{6.53}$$

となる．

同様に横方向ベータトロン運動の減衰も生じるが, そのメカニズムは縦方向とは異なっている．放射自体はビームエネルギーで決まるので, 縦方向の場合はエネルギー差が放射量の違いをつくり, 放射自体がエネルギー広がりを縮小する作用をもっていた．横方向の場合, ベータトロン振幅, あるいは横方向運動量は縦方向の運動量, あるいはエネルギーと近似的に独立であるので, 放射自体が減衰を生じない．シンクロトロン放射ではエネルギーとともに運動量も変化する．光子はほぼ電子の進行方向に放射されるので, ちょうどエネルギー変化に比例して, 進行方向および横方向運動量ともに減少する．　縦方向運動量は, リングに設置された再加速 RF 空洞によりエネルギーが一定となるように加速され, 平衡状態では一定に保たれる．一方, RF 加速は横方向にはまったく成分を持たないので, 横方向運動量はシンクロトロン放射が生じるたびに減少し, 時間がたてばたつほど横方向運動量は減衰していく．　加速器中における横方向の粒子の運動はベータトロン運動といい, 横方向の位置および運動量空間において, ある種の回転運動である．横方向の運動量が放射減衰により減少すると, ベータトロン運動を通じて実空間上での広がりの減少も生じる．すなわち, 横方向エミッタンスが減少していく．

以上のように, シンクロトロン放射により縦方向 (エネルギー空間) および横方向 (横方向運動量空間) でビーム広がりが減衰するという減少が生じる．　これらの効果を放射減衰と呼ぶ．

詳しくは述べないが, Robinson criteria から, 水平方向のダンピングは

$$\alpha_h = -\frac{1}{2}\frac{\langle P_{\gamma 0}\rangle}{E_0} - \frac{1}{2}2\frac{\langle P_{\gamma 0}\rangle}{E_0} + \frac{1}{2}\frac{dE_0}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\langle P_{\gamma 0}\rangle}{E_0}(1-\theta), \tag{6.54}$$

垂直方向のダンピングは

$$\alpha_v = -\frac{1}{2}\frac{\langle P_{\gamma 0}\rangle}{E_0}, \tag{6.55}$$

となる．横方向の縦方向のダンピングの違いは, 軌道の曲率の有無によって生じている．

問題 3-1 式 (6.49) を導け．

6.5　平衡状態

シンクロトロン放射は量子励起というビームの乱雑さを増加させる効果と, 放射ダンピングという乱雑さを減少させる二面性を持っている．シンクロトロン放射を連続的な現象として近似した場合にはダンピングが生じ, 量子力学的な確率的かつ不連続的な現象として扱った場合には, 量子励起現象が生じる．

原理的にはシンクロトロン放射は量子過程であるので, 全ての場合において, 確率的にあつかわなければならない. しかし一回の放射で生じるエネルギー変化が, ビームの持つエネルギー広がりに比べて充分に小さい場合, 放射の過程およびその影響を連続的なものとして扱っても差し支えない. すなわち個々の光子の放出が確率的かつ離散的に起こるとしても, そのエネルギー放出量の統計的な揺らぎが, ビームの持っているエネルギー広がりに比べて小さいならば, 時間あたり一定の割合でエネルギー放出が生じ, それにつれてビームの持つエネルギー広がりが減少していくという, 放射減衰の作用が支配的に働く.

一方, ビームの持つエネルギー広がりが放出される光子のエネルギーに近くなってくると, ひとつの光子の放出によって生じるビームのエネルギー広がりの増加が顕著になってくる. 従ってそのような場合は, 量子的な過程として扱わなければならない.

以上のようにシンクロトロン放射という現象は量子的過程であるが, ビームエネルギーの広がりの大きさによって放射減衰が支配的に生じるか, 量子励起が支配的に生じるかが決まってくる.

量子励起によるエネルギー広がりの増加割合 (growth rate) は

$$\frac{d\langle \Delta E^2 \rangle}{dt} = \int \epsilon^2 \dot{n(\epsilon)} d\epsilon = \langle \dot{N_{ph}} \langle \epsilon \rangle \rangle, \tag{6.56}$$

であり, 具体的には式 (6.32) であたえられる. 一方, 放射減衰によるエネルギー広がりの減少は

$$\frac{d\langle \Delta E^2 \rangle}{dt} = -2\alpha_s \langle E^2 \rangle, \tag{6.57}$$

であたえられる. この両者が等しい状態が均衡状態 (equilibrium state) である.

$$\langle \dot{N_{ph}} \langle \epsilon \rangle \rangle = 2\alpha_s \langle E^2 \rangle, \tag{6.58}$$

これから, 均衡状態のエネルギー広がりは

$$\frac{\sigma_E}{E^2} = \frac{\langle E^2 \rangle}{2} = \frac{1}{4\alpha_s} \langle \dot{N_{ph}} \langle \epsilon^2 \rangle \rangle, \tag{6.59}$$

となる. 式 (6.32)(6.53) を代入すると,

$$\frac{\sigma_E^2}{E^2} = C_q \frac{\gamma^2}{J_s} \frac{I_3}{I_2}, \tag{6.60}$$

ここで, C_q, I_2, I_5 などは次で与えられる.

$$C_q = \frac{55\hbar c}{32\sqrt{3} mc^2}, \tag{6.61}$$

$$I_2 = \int_C \frac{ds}{\rho^2}, \tag{6.62}$$

$$I_3 = \int_C \frac{ds}{\rho^3}, \tag{6.63}$$

$$\tag{6.64}$$

これらの積分はリング一周で定義される.

エネルギー広がりとリングにおけるバンチ長は, シンクロトロン振動を通じて対応している. エネルギー広がりが σ_E の時のバンチ長は次の式で与えられる.

$$\sigma_l = \frac{\beta c |\eta_c|}{\Omega} \frac{\sigma_E}{E}, \tag{6.65}$$

ここで η_c は momentum compaction と呼ばれる量で, リングを周回するビームの基準粒子の運動量からの相対的なずれにより生じる周回時間の変化量を表す因子である. また Ω はシンクロトロン振動の周期で

$$\Omega^2 = \omega_{rev}^2 \frac{h\eta_c e V_0 cos\psi_s}{2\pi\beta c p_0}, \tag{6.66}$$

ここで, ω_{rev} は回転角周波数, h はハーモニック数 (リング一周の周期を RF 周期で除したもの), V_0 は加速 RF の振幅で, ψ_s はシンクロトロンの同期位相である. これらから, バンチ長は

$$\sigma_l = \frac{\sqrt{2}c}{\omega_{rev}}\sqrt{\frac{\eta_c E}{heV_0 cos\psi_s}}\frac{\sigma_E}{E}, \tag{6.67}$$

となり, エネルギー広がりに比例した量となる.

同様に, 横方向のビームエミッタンスも平衡状態を形成する. シンクロトロン放射の放射減衰と量子励起とが等しい状態が平衡エミッタンスと呼ばれる量である. まず, x 方向（ビーム軌道面）について考えよう. 量子励起によるエミッタンス増大は時間あたりにして

$$\frac{d\langle a^2\rangle}{dt} = \frac{\beta}{E_0^2}\langle \dot{N_{ph}}\langle\epsilon^2\rangle\mathcal{H}(s)\rangle, \tag{6.68}$$

である. ここで a^2 は位相空間における距離の二乗に相当する量で, ビームの横方向運動（ベータトロン運動）の大きさを示す量である.

一方, 放射減衰によって, このベータトロン運動の大きさは

$$\left\langle \frac{da^2}{dt} \right\rangle = -2\alpha_h\langle a^2\rangle, \tag{6.69}$$

のように減衰する. この両者の効果が等しくなった状態が均衡状態であり,

$$\frac{\beta}{E_0^2}\langle \dot{N_{ph}}\langle\epsilon^2\rangle\mathcal{H}(s)\rangle - 2\alpha_h\langle a^2\rangle = 0, \tag{6.70}$$

で与えられる. ビームエミッタンスは $\epsilon_x = 1/2\langle a^2\rangle$ であたえられるので,

$$\epsilon_x = \frac{1}{4E_0\alpha_h}\langle \dot{N_{ph}}\langle\epsilon^2\rangle\mathcal{H}(s)\rangle >, \tag{6.71}$$

となる. これらの代入すると,

$$\epsilon_x = C_q\frac{\gamma^2}{J_h}\frac{I_5}{I_2}, \tag{6.72}$$

ここで I_5 は次で与えられる量である.

$$I_5 = \int_C \frac{\mathcal{H}(s)ds}{\rho^3}. \tag{6.73}$$

y 方向については, 放射減衰は x 方向と同様に作用するが, 量子励起に関しては, 理想的な場合はほとんど存在しない. それは y 方向には dispersion が存在しないからである. そのような場合, ビームの運動量が変化しても y 方向の軌道変化は生じないので, 量子励起の効果は生じない. 従って, エミッタンスは限りなくゼロへと減衰していく. しかし現実にはいくつかの効果によって, y 方向のエミッタンスはゼロにはならない. 一つめは y 方向の dispersion が磁石の製作精度や設置精度などが有限なため, 完全にはゼロにならないことである. 二つめの理由は, シンクロトロン放射光が, 電子軌道に対して有限の角度をもって放射されることである. これにより, シンクロトロン放射により, 横方向運動量が生じる. 三つめは, 横方向と縦方向の運動の混合が, やはり磁石などの設置誤差などが原因で生じ, x 方向の運動がいくばくか y 方向に回り込んでくるからである.

問題 3-2 放射減衰と量子励起は, 双方ともシンクロトロン放射という同一の物理現象が原因であるにもかかわらず, エミッタンスの減少と増大という全く逆の結果をもたらす.　なぜこのような現象が生じるのか説明せよ.

第 7 章

コライダーのビーム物理

コライダー等の物理実験では, 精度の高い測定を行うには同じ現象を繰り返し測定し, その再現性を確認する必要がある. また測定精度自体が統計精度により決定されるので, その意味でもなるべく多くの現象を発生させ, 観測する必要がある.

コライダーにおいて粒子が反応する単位時間あたりの事象数は, 反応断面積 σ と輝度 (Luminosity)$\mathcal{L}$ を用いて,

$$N = \sigma\mathcal{L}, \tag{7.1}$$

と表される. 反応断面積は物理法則により決定される量であるから, 所与のものとしてまったく操作性はない. 一方, 輝度は実験に用いる装置などの性能の向上により, 人為的に操作でき, 改善の余地のあるものである. 輝度は次のように与えられる.

$$\mathcal{L} = \frac{f_{rep} n_b N^2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} H_D, \tag{7.2}$$

ここで, f_{rep} は繰り返し周波数で, ここではパルス繰り返し周波数である. n_b は 1 パルスに含まれるバンチ数で, ILC の場合は 2625 である. N は 1 バンチあたりに含まれる電子あるいは陽電子の数で, 電子数と陽電子数は等しいとしている. 原理的には電子と陽電子の数は異なってもよいが, その場合にはビーム安定性が損なわれることが知られており, 通常は対称性のよい等電荷量のバンチ衝突が行われる. $\sigma_{x,y}$ は衝突点でのビームサイズ, H_D はピンチ効果による enhancemant factor である.

ルミノシティを最大化するためには, 繰り返し f を大きく, パルスあたりのバンチ数 n_B を大きく, バンチあたりの粒子数 N を多く, そして衝突点でのビームの大きさ $\sigma_{x,y}$ を小さくすれば良い. しかし以下にみるように, 様々な効果により各パラメーターは制限をうけ, またルミノシティ自身も制限される.

まず考えるべきは必要な電力である. 必要なビームパワーは

$$P_B = 2Ef_{rep}n_bN, \tag{7.3}$$

とかける.　ここから必要な電力 P_W は

$$P_W = 2\eta Ef_{rep}n_bN, \tag{7.4}$$

となる. η は供給される電力がビームエネルギーに変換される効率であり, これには送電ロス, 電源の変換効率, クライストロンの効率, 加速管への供給パワーとビームに移るエネルギーの比などもろもろの効率を含む. この効率はなるべく高い方がよいが, 技術的な条件により決まるものであり, 原理的上限はもちろん 1 である. この電力 P_W をなるべく低く抑える必要がある. また, 後ほどより系統的な議論を行う.

バンチあたりの粒子数 n_b やバンチ形状 (横方向のビーム径 $\sigma_{x,y}$ やバンチ長 σ_z) はビーム同士の電磁気相互作用により生じる制動輻射現象 (beamstrahlung) から制限を受ける. Beamstrahlung とはビームが生成する電磁場によるシンクロトロン放射により, 一部のビームのエネルギーが減少することでエネルギー広がりが増大する現象で, 図 7.1 にその模式図を示す. 陽電子はその周りに磁場を発生する. 電子はこの磁場により軌道を曲げられ, シンクロトロン放

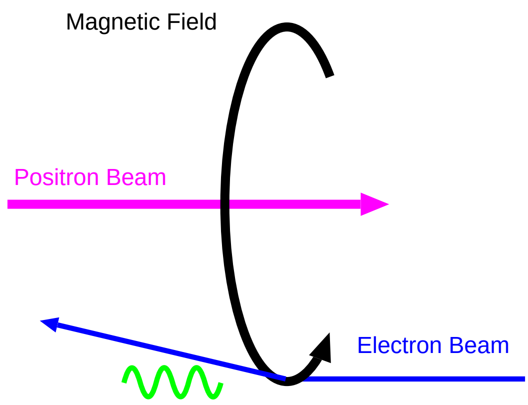


図 7.1　Beamstrahlung の模式図．左からやってきた陽電子が発生した電磁場により電子はその軌道をまげられ光子を放出する．電子は放出された光子の分だけエネルギーを失う．陽電子も同様に電子がつくった磁場の影響を受けるので, Beamstrahlung は双方のビームに発生する．

射を生じ, そのエネルギーを光子の形で放出して, エネルギーを減少させる．この現象は陽電子にも同様に生じるので, 結局この効果による電子および陽電子ビームのエネルギー広がりが増大する．コライダーにおいては初期状態の重心エネルギーが定義されていることが強力な武器となるから, エネルギー広がりの増大は大きな問題である．この効果により生じる平均的なエネルギー損失は

$$\delta_{BS} = \left\langle -\frac{\Delta E}{E} \right\rangle \sim 0.209 \frac{r_e^3 N^2 \gamma}{\sigma_z} \left(\frac{2}{\sigma_x + \sigma_y} \right)^2 \frac{1}{\left[1 + (1.5\Upsilon_{avr})^{2/3}\right]^2} \propto \frac{N^2 E}{(\sigma_x + \sigma_y)^2 \sigma_z},, \tag{7.5}$$

また, 生じる光子数は

$$n_\gamma \sim 1.08 \alpha r_e N \frac{2}{\sigma_x + \sigma_y} \frac{1}{(1 + \Upsilon_{avr}^{2/3})^{1/2}}, \tag{7.6}$$

と求められる．重心系エネルギー広がりの許容値から可能なバンチ形状や電荷量が決定される．

衝突点ではビームは収束され焦点を結ぶ．進行方向の座標を s として, 衝突点近傍でのビームサイズ $\sigma_y(s)$ は

$$\sigma_y(s) = \sqrt{\frac{\epsilon_{n,y} \beta_y(s)}{\gamma}}, \tag{7.7}$$

と記述される．ここで $\epsilon_{n,y}$ は規格化エミッタンス, β_y^* は衝突点におけるベータ関数, γ はローレンツガンマである．衝突点近傍でのベータ関数は, 衝突点におけるベータ関数 β_y^* により

$$\beta_y(s) = \beta_y^* + \frac{s^2}{\beta_y^*}, \tag{7.8}$$

と書けるので, 式 (7.7) は

$$\sigma_y(s) = \sqrt{\frac{\epsilon_{n,y} \beta_y^*}{\gamma}} \sqrt{1 + \frac{s^2}{(\beta_y^*)^2}}, \tag{7.9}$$

となる．この式から焦点震度（焦点でのビームサイズが $\sqrt{2}$ 倍以下になる領域）は β_y^* であることがわかる．このことからビームを絞ろうと β_y^* を小さくすると, 焦点深度が浅くなることがわかる．これを Hour-glass effect(砂時計効果) という．$\sigma_z > \beta_y^*$, すなわちバンチ長が焦点深度よりも大きい場合, ビームは実効的にその一部しか絞られた状態で衝突しないため, ルミノシティが大幅に低減する．それを防ぐには $\sigma_z \geq \beta_y^*$, すなわちバンチ長が焦点深度と等しい, あるいは短くすればよい．バンチ長を極端に短くすると Beamstrahlung が増大してしまうから, 結局 $\sigma_z \sim \beta_y^*$ とするのが最適状態ということになる．

ビームは衝突点において, 互いのクーロン力により変形をうける. それをあらわす Disruption parameter は

$$D_{x,y} = \frac{2Nr_e}{\gamma}\frac{\sigma_z}{\sigma_{x,y}(\sigma_x+\sigma_y)}, \tag{7.10}$$

コライダーでは異符号の粒子を衝突させるから, 両者の粒子間にはクーロン力が引力として作用し, 収束力を与える. したがって, この Disruption によりルミノシティの増大が期待できる. Disruption が無い場合のルミノシティとの比を増大係数 H として定義する. 図 7.2 H の Disruption 依存性を示す. 図中では, 増大係数を異なるオフセット（ビーム中心のズレの大きさをビーム径で規格化したもの）の値に対して表示している. この図から, オフセットが理想的に

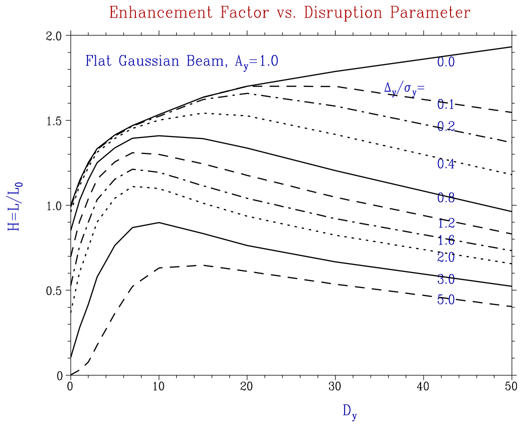


図 7.2　ルミノシティ増大係数を Disruption の大きさの関数としてしめしたもの. 異なるオフセット値について表示している.

ゼロの場合, Disruption に対して増大係数は単純に増大していくことがわかる. 一方, 有限のオフセットを仮定した場合, ある値で極値をとることがわかる. これは, オフセットがある場合, 強すぎる Disruption はオーバーフォーカスとなり, ビーム間の幾何的重なりを逆に減少させてしまうことを表している. その極大の値は, オフセットの増大にしたがい減少しき, また極大をとる Disruption の値は, オフセットの増大にしたがい減少している. オフセットをゼロに維持することは現実には不可能であるから, ある値（あるいは領域）を仮定して現実的に最適な Disruption を決めなくてはならない. 極大の位置はオフセットが 0.8 程度までであれば, 10 30 の区間にあり, かつその依存性は強くない. したがって Disruption=10-30 程度であれば, それなりの H の値を得られることが期待される. ルミノシティ自体はビームをより小さくして密度を高めるほうが大きくできるので, 大きな実効的ルミノシティを得るためには, 大きめの Disruption が有利である. 実際の設計では Disruption=25 を採用している.

7.0.1　非対称ビームとルミノシティスケーリング

以上の因子を考慮の上, 最適なルミノシティを決定しなくてはならない. 最適化のため, 条件などを簡単にまとめておく.

1. ルミノシティの最大化のため, 横方向ビームサイズは極小化すべき.
2. Breamsstrahlung によるエネルギー広がりは許容値以内に収めるべき.
3. Disruption は中庸にすべき.
4. 電力はなるべく小さくすべき.
5. $\sigma_z \sim \beta_y^*$.

このままではいろいろな条件があって, 何を基準にパラメーターを決定すべきか明らかではない. そこでまず横方向ビーム径について考えよう. 横方向ビーム径について, ルミノシティ最大化からはなるべく小さくしたいが, Beamstrahlung や Disruption からはあまり絞りたくない. ここでルミノシティと Beamstrahlung によるエネルギー

広がりについて, 比をとってみると

$$\frac{\mathcal{L}}{\delta_{BS}} \propto \frac{(\sigma_x+\sigma_y)^2}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{(\sigma_y/\sigma_x+1)^2}{\sigma_y/\sigma_x}, \tag{7.11}$$

を得る．この値は σ_x/σ_y を大きく取ることで, 最大化できることがわかる．すなわちルミノシティを大きくとり, Beamstrahlung を小さくするひとつの戦略が非対称ビームである．そこで $\sigma_x \gg \sigma_y$ としよう．すると近似的に

$$\delta_{BS} \propto \frac{N^2E}{\sigma_x^2\sigma_z}, \tag{7.12}$$

と Beamstrahlung は σ_y には依存せず, σ_x と σ_z に依存する．σ_y を下げれば下げるほどルミノシティは増大するから, σ_y は技術的に可能なかぎり下げるのが良い．

さらなる最適化のため, ルミノシティの表記を工夫しよう．ビームパワーを無次元量として記述すると

$$P_B = 2\gamma f n_b N^2 = \eta P_W, \tag{7.13}$$

と与えられれる．これを式 (7.2) に代入すると

$$\mathcal{L} = \frac{\eta P_W}{2\gamma}\frac{N}{4\pi\sigma_x\sigma_y}, \tag{7.14}$$

である．　横方向ビームサイズは

$$\sigma_x\sigma_y = \sqrt{\frac{\epsilon_{nx}\beta_x\epsilon_{ny}\beta_y}{\gamma^2}}, \tag{7.15}$$

と与えられるから, これをさらに代入すると

$$\mathcal{L} \propto \frac{\eta P_W}{2}\frac{N}{4\pi\sqrt{\epsilon_{nx}\beta_x\epsilon_{ny}\beta_y}} \tag{7.16}$$

となる．Beamstrahlung によるエネルギー広がりは

$$\delta_{BS} =\propto \frac{N^2\gamma^2}{\epsilon_x\beta_x\sigma_z}, \tag{7.17}$$

と書けるから, これも代入して

$$\mathcal{L} \propto \frac{\eta P_W}{E}\frac{\sqrt{\delta_{BS}\sigma_z}}{\sqrt{\epsilon_{ny}\beta_y}}, \tag{7.18}$$

を得る．定数などは適宜省略している．砂時計効果から $\sigma_z \sim \beta_y$ であるから,

$$\mathcal{L} \propto \frac{\eta P_W}{E}\frac{\sqrt{\delta_{BS}}}{\sqrt{\epsilon_{ny}}}, \tag{7.19}$$

という式を得る．この式をルミノシティのスケーリング則という．この式から, 得られるルミノシティは電力に比例することがわかるので, 電力で規格かしたスケーリング則を規格化スケーリング則とする．

$$\mathcal{L}_\backslash \propto \frac{\eta}{E}\sqrt{\frac{\delta_{BS}}{\epsilon_{ny}}}. \tag{7.20}$$

このスケーリング則からつぎのような指標が明確となる．

1. 電力効率 η は大きければ大きいほどよい．
2. 小さい方のエミッタンス ϵ_{ny} は小さければ小さいほどよい．
3. Beamstrahlung の許容値 δ_{BS} は, 大きいほどルミノシティを大きくできる．

表 7.1　ILC の基本パラメーター. ILC Reference Design Report より.

Parameter	value	unit
Bunch population	3.2	nC
Number of bunches	2625	
Linac bunch interval	369	ns
RMS bunch length	200	μm
Normalized horizontal emittance at IP	10	πmm.mrad
Normalized vertical emittance at IP	0.02	πmm.mrad
Vertical beta function at IP	10	mm
RMS horizontal beam size at IP	474	nm
RMS vertical beam size at IP	3.5	nm
Vertical disruption parameter	14	
Fractional RMS beam energy loss to beamstrahlung	1.7	%

最初の指標は技術的な課題であり, より効率的な電源や加速方式が望ましいという, 至極当然な要請である. 三番目は物理実験により決まってくるもので, 許容できるエネルギー広がりによりルミノシティが決まってくることを表している. 加速器科学としては二番目のエミッタンスの最小化が課題であることが明確となる. リニアコライダーにおけるルミノシティ最大化の条件は極小エミッタンスの実現なのである.

ILC においては, 最終的に最適化されたパラメーターは表 7.1 のようにまとめられる.

第 8 章

電子放出の素過程と陰極

物質は分子あるいは原子の集まりである．原子は原子核と電子からなる．その電子を物質から引き剥がし, 真空中へ取出す装置が電子銃である．ここで真空といっているのは物質の外という意味であり, 何もない空間という意味の真空ではない．例えばネオン管の中の放電現象はネオンガス雰囲気中への電子の放出現象であり, その電子と気体分子との衝突による発光がネオンサインとなる．

原子核と電子がバラバラにならずに物質が物質として安定に存在しているということは, そのように保つ物理的なポテンシャルが存在しているということである．従ってそこから電子を外に連れ出すにはエネルギーが必要である．そのエネルギーの供給源や電子の放出過程などの違いにより, 電子発生の機構には次の四つがある．

- 熱電子放出
- 電界電子放出
- 光電子放出
- 二次電子放出

このうち電子銃の動作原理としてよく利用されるのは熱電子放出, 電界電子放出, そして光電子放出である．二次電子放出は光電子増倍管における信号の増幅などに利用されている．

いずれの場合も電子を発生するデバイスとして物質を考える場合, その物質を陰極 (Cathode) という．これは二枚の金属電極に正と負の電圧をかけたときに, 負の電圧をかけた極, すなわち「陰極」から電子が放出されるのが理由である．今日では電圧をかけなくても, 電子発生のための物質を一般的に陰極という．

8.1　熱電子放出

物質を高温に熱すると物質中の電子が熱エネルギーを得て表面障壁を越えて真空中に放出されるようになる．この現象を熱電子放出 (thermionic emission) という．ここでは金属を例にとり, 熱電子放出の仕組みを詳しく説明する．

金属に限らず物質の中の電子の分布は

$$N(E) = D(E)f(E), \tag{8.1}$$

と表される．ここで $D(E)$ は状態密度であり, 電子がとりうるエネルギー状態数をあらわしている．すなわち, 物質中で電子がエネルギー $(E, E + dE)$ の区間にある状態数は $D(E)dE$ で表される．金属の場合は,

$$D(E) = \frac{2m^3}{h^3}, \tag{8.2}$$

と与えられる．ここで $m/\hbar$ は速度空間を波数空間に変換する因子であり, 三乗は三次元空間をあらわしている．因子 2 は電子がスピン自由度をもっており, ひとつのエネルギー準位にふたつまでのスピンの異なる電子が入ることを表している．

$f(E)$ は Fermi-Dirac 分布関数であり, 特定のエネルギー状態に電子が存在する確率を表している．フェルミ分布は電子の統計性, すなわち電子がフェルミ粒子である（同じ状態にはひとつの電子しか入ることができない）を反映している．フェルミ分布は具体的には

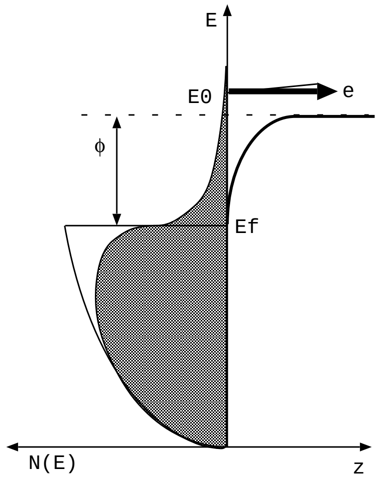


図 8.1　カソードの電子分布と熱電子放出の様子．縦軸はエネルギー準位, 横軸の右半分は陰極からの距離, 左半分は物質内での電子の存在確率を表している．

$$f(E) = \left[\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1\right]^{-1}, \tag{8.3}$$

ここで E は電子のエネルギー準位, E_F はフェルミエネルギー, k はボルツマン定数 $(1.38 \times 10^{-23}\ J/K)$, T は温度 (T) である．

図 8.1 は熱電子放出の様子を模式的に表したものである．縦軸はエネルギー準位, 横軸の右半分は陰極からの距離, 左半分は物質内での電子の状態密度およびそこでの存在確率を表している．

金属中の電子はフェルミ統計に従い, 0 K(Kelvin) のときには内殻からフェルミエネルギーまでの準位を満たしている．すなわち $E < E_F$ で $f = 1.0$ すなわちフェルミエネルギー以下の準位は全て電子で満たされた状態であり, $E > E_F$ で $f = 0$ すなわちフェルミエネルギー以上の準位は全て空いている．図では E_f を上辺とする円弧と直線で囲まれた範囲が $T = 0$ での電子の分布に相当する．真空準位 E_0 との間には エネルギー差 ϕ の障壁があり, これを金属の仕事関数 (work function) という．フェルミ準位にある電子は仕事関数 (もしくはそれ以上) に相当するエネルギーを得ることで真空中に放出される．仕事関数は 0 K の金属から電子を取り出すのに必要な最小のエネルギーである．

有限温度 TK では電子はフェルミエネルギー E_F を越える準位にも分布するようになる．フェルミエネルギー準位では常に $f = 0.5$ となり, 準位のうち半数が電子で, 半数が正孔で満たされた状態となる．図では黒く塗られた雲型の部分が電子の分布状態をあらわしてる．高温になると少なくない電子が真空準位 $E_0 = E_F + \phi$ よりも高いエネルギー準位に分布するようになる．そうすると電子は確率的に真空中に放出される．これが熱電子放出現象である．

今, 図 8.2 で表されている領域から放出される電子の量を考えよう．$dx - dy$ 面が真空との界面である．z 方向の運動を考えると, 時間 dt の間に表面に到達する電子は, 速度を v_z として $v_z dt$ の深さにいる電子までであり, それより深い場所にいる電子は表面まででてくることはできない．また, 図 8.1 に示しているように, 界面には真空障壁が存在し, ある程度エネルギーの高い電子しか真空中へとでることはできない．このふたつの条件から, z 方向の運動について

$$dz + v_z dt > 0, \tag{8.4}$$

$$v_z > \sqrt{\frac{2(\mu + \phi)}{m}} \equiv v_{z0}, \tag{8.5}$$

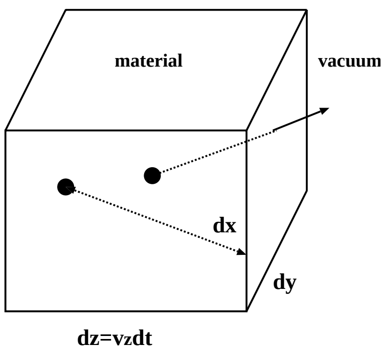


図 8.2　界面から放出される電子の様子．深さ方向は $v_z dt$ より浅い領域の電子のみが表めに到達できる．

という条件がつく．いじょうをまとめると，今速度が (v_x, v_y, v_z) から $(v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$，位置が (x, y, z) から $(x + dx, y + dy, z + dz)$，時間が t から $t + dt$ の間に放出される電子数は

$$dN(E) = \frac{2m^3}{h^3} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right)} dxdydzdv_x dv_y dv_z, \tag{8.6}$$

と与えられる．ここで $dz = v_z dt$ と置くと，時間についての因子が顕になる．両辺を $dxdydt$ でわると

$$\frac{dN(E)}{dxdydt} = \frac{2m^3}{h^3} \frac{v_z}{1 + \exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right)} dv_x dv_y dv_z, \tag{8.7}$$

単位面積あたり，単位時間あたりに放出される電子数が得られる．上式を速度について積分してやれば，ある温度における単位時間あたりの放出電子数が求められる．積分を実行する前に，フェルミ分布を近似する．一般的に金属の仕事関数は数 eV 程度であるから，温度に換算すると数万 K にもなる．カソードの温度はせいぜい数千 K 程度であるから，$E - \mu \gg kT$ が成り立つ．これより $\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) = 1/x$ ととると，$1/x \ll 1$ であるので，この x について Taylor 展開して，　一次までで近似すると，

$$f(E) = \frac{1}{1 + 1/x} = \frac{x}{x+1} \sim x = \exp\left(-\frac{E-\mu}{kT}\right) \tag{8.8}$$

となる．この近似を用いて積分を表すと

$$\begin{aligned} N = &\frac{2m^3}{h^3} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right) \\ &\int_{v_{z0}}^{\infty} dv_z \int\int_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y \; v_z \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \end{aligned} \tag{8.9}$$

となる．ここでいうエネルギー E は運動エネルギーに他ならないから

$$E = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2), \tag{8.10}$$

とおけ，積分の中身を直接計算できる．v_x, v_y に関する積分は $r^2 = v_x^2 + v_y^2$ とおいて，平面極座標上の積分に変換すると

$$I_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \exp\left(-\frac{mv_{x,y}^2}{2kT}\right) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} rdr \exp\left(-\frac{mr^2}{2kT}\right) = \frac{2\pi kT}{m}. \tag{8.11}$$

　また v_z に関する積分は

$$I_z = \int_{v_{z0}}^{\infty} dv_z v_z \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) = \frac{kT}{m} \exp\left(-\frac{mv_{z0}^2}{2kT}\right) = \frac{kT}{m} \exp\left(-\frac{\phi + \mu}{kT}\right), \tag{8.12}$$

となる．ここで式 8.5 より $v_{z0}^2 = 2(\phi + \mu)/m$ を用いた．すべてをまとめると，単位時間あたり単位面積から放出される電子数は

$$N = \frac{4\pi m k^2 T^2}{h^3} \exp\left(\frac{-\phi}{kT}\right), \tag{8.13}$$

と求められる．

放出電流密度 J は式 (8.13) に素電荷 e をかけて

$$J = en = AT^2 \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right), \tag{8.14}$$

と与えられる．ここで A は

$$A = \frac{4\pi e m k^2}{h^3} = 1.20 \times 10^6 [A/m^2 K^2], \tag{8.15}$$

と表記され，熱電子放出定数 (thermionic emission constant) と呼ばれるものである．式 (8.14) を Richardson-Dushman の式という．

実際に熱電子銃から得られる電流は J よりも一般的に小さくなる (9.1 節を参照) が，電子を引き出すための電圧 (陽極電圧) が充分に高い状態では実際に得られる電流と J は一致する．つまり J は熱陰極から得られる最大放出電流密度を与えるもので，飽和電流密度 (saturated current density) ともよばれる．

熱陰極からの放出電流を増やすためには式 (8.14) で示されているように仕事関数 ϕ が小さく，動作温度 T の高い，すなわち融点の高い物質が望ましい．通常よく使われる物質としては融点の高い金属であるタングステン (W) やタンタル (Ta)，または酸化物として BaOSrO, ThO などがある．8.1.3 を参照のこと．

8.1.1　熱エミッタンス

陰極表面から放出された熱電子は乱雑な熱運動を行っており，位相空間でみると空間方向のみならず，運動量方向にもあるひろがりをもっている．ビームの品質を表す量としてビームエミッタンスが用いられるが，陰極から放出されたビームはこの熱運動に由来する固有のエミッタンスをもっている．この熱運動によるエミッタンスを熱エミッタンスと呼んでいる．この節ではこの熱エミッタンスを求めよう．

熱エミッタンスをもとめるために，横方向の運動エネルギーの平均値をもとめよう．そのため，まず放出される粒子の横方向の運動エネルギーの合計を式 (8.9) をもとに求める．この式の被積分関数に $E_x + E_y$ を掛け合わせることで，この値が求められる．書き表すと

$$E_{t-total} = \frac{2m^3}{h^3} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right) \int_{v_{z0}}^{\infty} dv_z \int\int_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y \; v_z (E_x + E_y) \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \tag{8.16}$$

となる．v_z についての積分はすでに式 (8.12) で行ったように直接計算可能で，

$$I_z = \int_{v_{z0}}^{\infty} dv_z v_z \exp\left(-\frac{m v_z^2}{2kT}\right) = \frac{kT}{m} \exp\left(-\frac{\phi + \mu}{kT}\right), \tag{8.17}$$

である．v_x および v_y についての積分は $v_x - v_y$ 平面を平面極座標に変換して $r^2 = v_x^2 + v_y^2$ とおくと，

$$\begin{aligned} I_t &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y (E_x + E_y) \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2kT}\right), \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr \frac{m r^3}{2} \exp\left(-\frac{m r^2}{2kT}\right), \end{aligned} \tag{8.18}$$

となる．この積分は部分積分を利用して計算することができる．まず θ についての積分を実行し, 続いて部分積分を行う．

$$
\begin{aligned}
I_t &= 2\pi\frac{m}{2}\int_0^\infty drr^2 r\exp\left(-\frac{mr^2}{2kT}\right), \\
&= m\pi[r^2\left(-\frac{kT}{m}\exp\left(-\frac{mr^2}{2kT}\right)\right)]_0^\infty + m\pi\int_0^\infty dr2r\frac{kT}{m}\exp\left(-\frac{mr^2}{2kT}\right), \\
&= 2m\pi\left[-\left(\frac{kT}{m}\right)^2\exp\left(-\frac{mr^2}{2kT}\right)\right]_0^\infty, \\
&= 2m\pi\left(\frac{kT}{m}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

以上をまとめると, 放出される電子が持つ横方向エネルギーの総量 $E_{t-total}$ が次のように求められる．

$$
E_{t-total} = 4\pi m\left(\frac{kT}{m}\right)^3\exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right). \tag{8.20}
$$

この式を式 (8.13) で示されている両辺単位時間あたり, 単位面積あたりの放出電子数でわれば, 電子ひとつあたりの平均横方向運動エネルギー $\bar{E_t}$ が求められる．

$$
\bar{E_t} = \frac{E_{t-total}}{N} = kT, \tag{8.21}
$$

この値は電子ひとつが持つ横方向エネルギーの合計である．デカルト座標系で考えると, x 方向あるいは y 方向のエネルギーはこの半分となり,

$$
\bar{E_{x,y}} = \frac{kT}{2}, \tag{8.22}
$$

である．ここでビームは x と y に対して対称に分布していると仮定している．

ビーム力学では, 通常の運動量の定義に替えて無次元運動量を用いる．x 方向の無次元運動量 x' は次のように定義される．

$$
x' = \frac{p_x}{p_s}, \tag{8.23}
$$

ここで p_x および p_s は x 軸方向および s 軸方向の運動量である．p_x と $\bar{E_x}$ の関係を古典的近似を用いて求めると,

$$
\bar{E_x} = \frac{p_x^2}{2m_0}, \tag{8.24}
$$

無次元運動量は $p_s = \gamma m_0\beta c$ を式 (8.23) に代入して

$$
x' = \sqrt{\frac{2m_0\bar{E_x}}{\gamma^2\beta^2m_0^2c^2}} = \frac{1}{\gamma\beta}\sqrt{\frac{kT}{m_0c^2}}, \tag{8.25}
$$

と求められる．位相空間におけるビームの分布に相関がないとすると, ビームの横方向エミッタンス ε_x は

$$
\varepsilon_x = \sigma_x x' = \frac{R}{2}\frac{1}{\gamma\beta}\sqrt{\frac{kT}{m_0c^2}}, \tag{8.26}
$$

となる．ここで σ_x はビームの x 軸への射影の標準偏差であり, 半径 R の一様分布を仮定した場合, 式で示したように $R/2$ となる．このエミッタンスの定義はビームが位相空間で占める面積に相当し, 保存場における運動においては保存量となるなど, 物理的に非常に明確なものである．しかしビーム全体の加減速を考えると, $\gamma\beta$ に依存性にみられるように, 保存量とはならない．加減速を含めて保存量となるのは次に定義する規格化エミッタンスである．

$$
\varepsilon_{nx} = \gamma\beta\varepsilon_x = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{kT}{m_0c^2}}, \tag{8.27}
$$

古典的な熱陰極であるタングステンを例にとって考えよう．陰極の温度を 2700 K , 陰極のスポットサイズを直径 1.0cm(x 軸上への射影の標準偏差は 0.5/2 = 0.25cm) とすると熱エミッタンスは 2.50 × 0.48 = 1.20[π mm.mrad] となる．以上のように熱電子銃の熱エミッタンスにおいては実は熱運動ではなくビームのスポットサイズによる寄与が支配的である．ビームのスポットサイズはパービアンスを大きくとるためには大きいほうがいいのだが, エミッタンスを小さくするためには小さくしなければいけない．次節で論じる空間電荷効果によるエミッタンス増大も実は電流値が大きい程その効果は大きく, 結局パービアンスの大きい電子銃ではエミッタンスが大きくなってしまう．熱電子銃で低エミッタンスを実現するにはパービアンスを小さくし, ビーム径を小さくすることが必要である．

問題 4-1. ある一定の温度で熱電子放出電流は異なる金属において比較した場合、その値はどのようになると予想されるか述べよ．

8.1.2　熱陰極

代表的な熱陰極物質について、概説を行う．

8.1.3　金属陰極

仕事関数が低く, 融点が高いほど高温での動作が可能なため高い電流を取り出すことができる．しかし一般的に仕事関数の小さい物質は融点も低いために, 実用上よく使われる物質は W, Ta, そして Mo 等である．また寿命という観点からみると動作温度での蒸気圧が充分にひくいことが必要である．陰極材料としての特性を表す指標として ϕ/T_e

表 8.1　各金属の仕事関数, T_e, そして ϕ/T_e. 文献 [27] より抜粋.

物質	ϕ (eV)	T_e (K)	$\phi/T_e \times 10^3$
Cs	1.9	320	5.9
Ta	4.1	2680	1.5
Mo	4.2	2230	1.9
W	4.5	2860	1.6

が使われる．ϕ は仕事関数, T_e は蒸気圧が $10^{-5}Torr$ となるときの温度で, 毎秒 10 原子層が蒸発する状態に相当する．この指標が低いほど仕事関数が低く, 高い温度での長時間の動作が可能なことを示している．表 8.1 に代表的金属の仕事関数 ϕ, T_e そして ϕ/T_e が示してある．W や Ta は仕事関数は決して低くないが, ϕ/T_e が低くなっており, 陰極材料として適当であることがわかる．また Cs は仕事関数は低いが融点が低く, 熱陰極としては不適当であることがわかる．

W の動作温度は通常 $2600 \sim 2800K$ で, 放出電流密度は $100 \sim 400mA/cm^2$ である．フィラメント状, あるいはディスク状のタングステンが陰極としてよく利用される．

8.1.4　単原子層陰極

金属表面に陽電性原子が吸着した場合, 吸着分子が分極し表面に電気二重層が形成されるため実効的に仕事関数は減少する．その大きさは

$$\Delta\phi = 4\pi\mu n_s, \tag{8.28}$$

で与えられる．ここで μ は吸着原子の双極子能率, n_s は吸着原子の表面密度である．単原子層陰極は構造的に残留ガス圧が高くなると急激に仕事関数が上昇すること, またイオン衝撃にたいして非常に弱いという欠点を持っており, い

ずれにしろ高真空での使用が前提となる．

最も多く使用されている単原子層陰極はタングステンにトリウムを吸着させた $Th-W$ あるいは $Th-W_2C$ などのトリタン陰極である．トリタン陰極の仕事関数はタングステンのそれが 4.5 eV なのに対し, $Th-W$ と $Th-W_2C$ 各々に対して 2.63, 2.18 eV である．

トリタン陰極は $Th0_2$ を 1-2% 含んだ W を真空中で 2800K 程度にごく短時間熱して ThO_2 を還元し, W 表面に Th 原子膜を形成する．$Th-W_2C$ 陰極は同様の熱処理をベンゾールを 1-2% 含んだ水素雰囲気中でおこなうことにより得られる．実際にビームを出すときの動作点は $1800 \sim 1900K$ 付近である．

8.1.5　酸化物陰極

BaO を主体とした酸化物陰極は熱陰極のなかで最も効率が高いのが特長であり, 広範に使用されている．W や Ni などの基体金属上に Ba などのアルカリ土類金属の酸化物の層をつくったもので, 仕事関数は 1eV 程度と低い値を示す．空気中で安定なアルカリ金属の炭酸塩を基体金属に塗布し, これを真空中で加熱して二酸化炭素を放出させることにより酸化物を得る．

高い効率の一方で, 材料の品質や各種処理条件により最終的に得られる陰極の結晶サイズ, 表面状態, 活性度が大きく左右される．また使用中に酸素分圧が上昇したり, 数百 mA/cm^2 などの過大な電流をとりだすと陰極は劣化してしまう．また高温で無理に大きな電流を引き出そうとすると表面抵抗と幾何学的凹凸が原因となり放出電子のエネルギー分布は数 V に達して, 最後には放電により酸化物層が破壊されてしまう．

また酸化物陰極が大気にふれると水蒸気と反応して水酸化物となり, その性能劣化は取り戻すことができない．そのため陰極が大気, とくに水分とふれることがないように特別の注意が必要である．

以上のように酸化物陰極は高い性能の代償として非常に取扱の難しい陰極であるが, 実用上の欠点を改良したものが開発されている．それらは補給型陰極 (Dispenser Cathode) と呼ばれるもので, 何らかの方法により陰極に Ba を供給し, 真空容器から取り出すことなくかなりの長時間にわたり使用できるような仕組みを備えたものである．

その一つが空洞貯蔵補給型陰極 (L-cathode) と呼ばれるもので, 陰極である多孔質タングステンの背後の空洞に Ba を含む物質をいれておき, 熱拡散により陰極へと Ba を供給する．含浸 (がんしん) 型陰極 (Impregnated cathode) は多孔質タングステンに直接 BaO を含ませたり, あるいは W と BaO を混合して焼結したもので, 空洞貯蔵型と同様に熱拡散により内部に含まれている BaO が表面に供給される．空洞貯蔵型は構造が複雑な上に液漏れなどの問題があり, 現在では含浸型が主に用いられている．

8.1.6　セラミック陰極

セラミックである六ホウ化ランタン LaB_6 や六ホウ化セレン CeB_6 などは, 比較的仕事関数が低いため, 低い温度領域で動作可能なことから注目されている．ともに仕事関数は 2.5eV 程度, 動作温度は 1800K 以下, 典型的な取り出し電流は数 10 mA/cm^2 である．

LaB_6 や CeB_6 が注目されているのは, 単結晶が生成可能であり, 従来の含侵型や酸化物陰極では難しかった滑らかな表面が, 比較的容易に得られることである．滑らかな表面から放出された電子ビームは, 熱電子放出から理論的に予測される熱エミッタンスに近い値を持っており, 高輝度電子源として有力である．仕事関数が低く, 動作温度を低く抑えることが可能である点も, 高輝度ビームを生成するのに有理である．ビーム径 1mm あたりの熱エミッタンスは 0.6πmm.mrad であり, 後述する通常の光陰極と遜色ない性能が得られる．

8.2　Schottky 効果と電界電子放出

Richardson-Dushman の式は熱電子放出電流は外部の電場とは独立であることを示しているが, 現実には外部電場によって放出電流が変化することが知られている．この効果を一般的に陰極における Schottky 効果と呼ぶ．

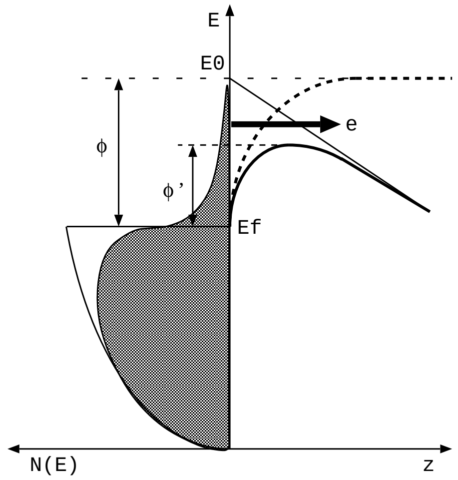


図 8.3　外場があるときの陰極表面のポテンシャルの様子．定義等は図 8.1 と同様．E_0 と縦軸の交点から右斜め下に伸びる直線は外部電場によるポテンシャルをしめしている．真空ポテンシャルは点線から太実線へと変化し, それにより仕事関数も ϕ から ϕ' へと実効的に低下する．(Schottky 効果)

金属表面のポテンシャルは図 8.3 のようになっている．点線で示されている (外部電場のない状態での) 真空ポテンシャルが境界面で曲線となるのは, 真空に放出された電子が金属表面上に鏡映電荷を生じ, ポテンシャルが緩和されるためである．実電荷が導体表面から距離 z の場所にあるとき, 鏡映電荷によるポテンシャル V_i は,

$$V_i(z) = -\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 z}, \tag{8.29}$$

と表される．外部電場によるポテンシャルは電場を E とすると $-eEz$ である．図では E_0 と縦軸の交点から右斜め下に伸びる直線がそれをしめしている．したがって外部電場のある場合の真空のポテンシャル V は

$$V(z) = E_0 - \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 z} - eEz, \tag{8.30}$$

とあらわされる．ここで E_0 は外場が無いときの無限遠での真空のポテンシャルである．真空のポテンシャルは図では太実線の上に凸の曲線として描かれている．真空準位は $z = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{e}{\pi\epsilon_0 E}}$ で最大となり, その値は

$$V(z) = E_0 - \frac{e}{2}\sqrt{\frac{eE}{\pi\epsilon_0}} \tag{8.31}$$

となる．真空中へと電子が放出されるにはこのポテンシャルを越えてゆく必要があるので, 電場がある場合の実質的な仕事関数 $\phi(E)$ は

$$\phi(E) = E_0 - \mu - \frac{e}{2}\sqrt{\frac{eE}{\pi\epsilon_0}}, \tag{8.32}$$

と表される．電場の無い状態での仕事関数は $\phi_0 = E_0 - \mu$ なので結局電場があるときの実効的な仕事関数 $\phi(E)$ は

$$\phi(E) = \phi_0 - e\sqrt{\frac{eE}{4\pi\epsilon_0}}, \tag{8.33}$$

となる．すなわち陰極表面に電場が存在することにより仕事関数が減少するのである．この現象は W. Schottky により理論的に研究されたことから Schottky 効果と呼ばれている．

陰極表面の外部電場が非常に強くなると，この Schottky 効果により仕事関数が減少するとともに，図 8.4 で示されているようにポテンシャルが非常に薄くなる．そしてポテンシャル障壁を直接飛び越えるような運動エネルギーを持たない電子でも，トンネル効果によって真空へと脱出する，いわゆるトンネル電流が無視できない量となる．この現象を電界電子放出現象，あるいは cold emission という．

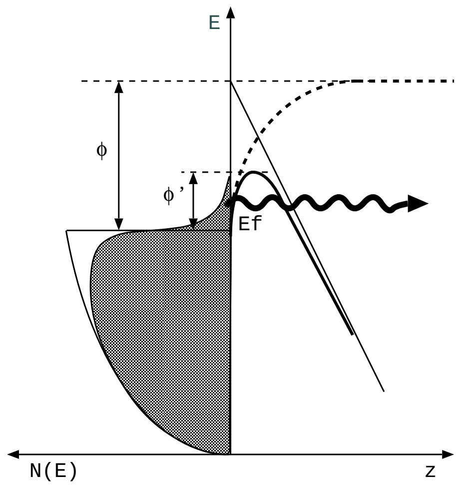


図 8.4 電界電子放出現象の模式図．非常に強い外部電場により真空の障壁が薄くなり，障壁よりも低いエネルギーを持つ電子もトンネル効果により真空中へ洩れだしてくる．定義等は図 8.1 と同様．

電界電子放出は物質内での電子分布を表す式 (8.6) に障壁の透過係数をかけあわせて，積分することによって得られる．障壁の形を

$$U(z,F) = \begin{cases} 0 & z < 0, \\ E_0 - eFz & z > 0. \end{cases} \tag{8.34}$$

と近似することにより障壁の透過係数 $P(E_z, F)$ は WKB（Wenzel-Kroemer-Brilouin) 法により求めることができる．WKB 法の詳細については付録.1 を参照のこと．

$$\begin{aligned} P(E_z, F) &= \exp\left[-\int_0^{x_1} \sqrt{\frac{8m(2\pi)^2}{h^2}\left[U(z,F) - E_z\right]} dz \right] \\ &= \exp\left[-\frac{8\pi\sqrt{2m}}{3heF}(E_0 - E_z)^{3/2} \right], \end{aligned} \tag{8.35}$$

と求められる．ここで $x_1 = (E_0 - E_z)/eF$ である．これを用いて放出電流密度は

$$J = e\int_0^\infty n(E_z)P(E_z)dE_z, \tag{8.36}$$

のように求められる．$n(E_z)$ は式 (8.7) において，v_x, v_y 成分についての積分を行い，かつ表示をエネルギーに変更したものである．まずはそれを導こう．式 (8.7) をあらためて単位時間あたり単位面積あたりの放出電子数として積分し

$$N = \frac{2m^3}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{v_z}{1 + \exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right)}, \tag{8.37}$$

を求めよう．v_z の積分範囲が異なっているのは，真空への透過条件をここで入れ込む変わりに，透過係数により決められるからである．まず v_x と v_y の積分を実行するために，エネルギーを

$$E = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2), \tag{8.38}$$

と表示して重積分を用いると,

$$\int dv_x \int dv_y \frac{v_z}{1+\exp\left(\frac{\frac{m}{2}(v_x-2+v_y^2+v_z^2)-\mu}{kT}\right)} = 2\pi \int rdr \frac{v_z}{1+\exp\left(\frac{\frac{m}{2}(r^2+v_z^2)-\mu}{kT}\right)} \tag{8.39}$$

ここで $r^2 = v_x 2 + v_y^2$ である. さらに $t = r^2$ と変数変換すると

$$\pi \int_0^\infty dt \frac{v_z}{1+\exp\left(\frac{\frac{m}{2}(t+v_z^2)-\mu}{kT}\right)} \tag{8.40}$$

ここで、積分公式

$$\int \frac{du}{1+\exp(\alpha u+\beta)} = \frac{1}{\alpha}\ln\left[1+\exp(-\alpha u-\beta)\right] \tag{8.41}$$

を用いると、式 (8.40) は積分できて、

$$2\pi \frac{kT}{m} v_z \ln\left[1+\exp\left(\frac{\mu-Ez}{kT}\right)\right] \tag{8.42}$$

以上を代入すると式 (8.36) は

$$J = \frac{4\pi em}{h^3} kT \int_0^\infty dE_z \ln\left[1+\exp\left(\frac{\mu-E_z}{kT}\right)\right] \exp\left[\frac{-8\pi\sqrt{2m}}{3heF}(E_0-E_z)^{3/2}\right] \tag{8.43}$$

のように書ける. 今、温度は室温程度として、$e^(E_z-\mu/)kT \ll 1$ として近似すると、式 (8.43) は

$$J = \frac{4\pi em}{h^3} \int_0^\infty dE_z(\mu-E_z) \exp\left[\frac{-8\pi\sqrt{2m}}{3heF}(E_0-E_z)^{3/2}\right] \tag{8.44}$$

となる。$E_0 - E_z = E_0 - \mu + \mu - E_z = \phi + (\mu - E_z)$ とおき, かつ $E' = Ez - \mu$ が小さいとしてテイラー展開すると,

$$(E_0-E_z)^{3/2} = [\phi - E']^{3/2} = \phi^{3/2} - \frac{3}{2}\phi^{2/1}E' \tag{8.45}$$

となるので, これ代入すると, 式 (8.44) の exp の部分は

$$\exp\left[\frac{-8\pi\sqrt{2m}}{3heF}(E_0-E_z)^{3/2}\right] = \exp\left[-\frac{8\pi\sqrt{2m}}{3heF}\phi^{3/2}\right] \times \exp\left[\frac{4\pi\sqrt{2m}}{heF}\phi^{1/2}E'\right], \tag{8.46}$$

となる. これを用いて、式 (8.44) は

$$J = \frac{4\pi em}{h^3} \exp\left[-\frac{8\pi\sqrt{2m}}{3heF}\phi^{3/2}\right] \int_0^\infty dE'E' \exp\left[-\frac{4\pi\sqrt{2m}}{heF}\phi^{1/2}E'\right] dE', \tag{8.47}$$

となる. この積分は部分積分の公式を使用すると簡単に計算できて,

$$J = \frac{e^3F^2}{8\pi h\phi} \exp\left[-\frac{8\pi\sqrt{2m}}{3heF}\phi^{3/2}\right], \tag{8.48}$$

となる. 式 (8.48) を Fowler-Nordheim のトンネル電流の式 [22] といい金属表面の単位面積・単位時間あたりに電界放出される電流密度を表している.

電界電子放出現象は表面電場が 10^8V/m を越えると顕著となってくる. そのような高い電場を得るために, 非常に先の鋭利な針の先端を陰極として用いて, そこに電場を集中させるようにする. 非常に大きな電流密度が可能なこと, かつ構造が微細であればあるほど, 局所的な電場は増大するので, 陰極表面全体にかける電場は高電圧である必要はないこと, 熱陰極のように陰極を熱する必要がないこと, 使用するさいの活性化などの複雑な手順も必要ないこと, など

が利点である．一方, 発生するのは連続ビームであるので, 時間構造の制御は困難であること, 陰極面積が極めて小さいのでピーク電流の絶対値は限られていること, 長時間の使用により cathode 先端部の摩耗による電場の低減により徐々に電流が低下すること, などが欠点である．

ピーク電流は限られるが点状の電子源として連続ビームの発生には適している．そのため電子顕微鏡の電子源として用いられている．また近年では微細加工技術の発達により, 多数の「針」を二次元的に配置して大電流の発生を可能としたタイプの陰極や, 究極の微細構造としてカーボンナノチューブを電界放出の陰極として用いる研究 [23] が進展している．

問題 4-2. 電界放出による電流密度を J_{fe} としたとき, F の関数 $y(F)$ を

$$y(F) = ln\left(\frac{J_{fe}}{F^2}\right) \tag{8.49}$$

のように定義した場合, どのような関数で表されるか述べよ．

8.3 光電子放出

物質が光子を吸収して電子を放出する現象は光電効果としてしられている．この現象は物質内の電子が光子のエネルギー ($h\nu$) を受け取り, 物質内から真空障壁を越えて飛び出してくる現象として理解できる．この場合, 光電子を発生させる物質を特に光電陰極 (Photo-cathode) と呼ぶ．

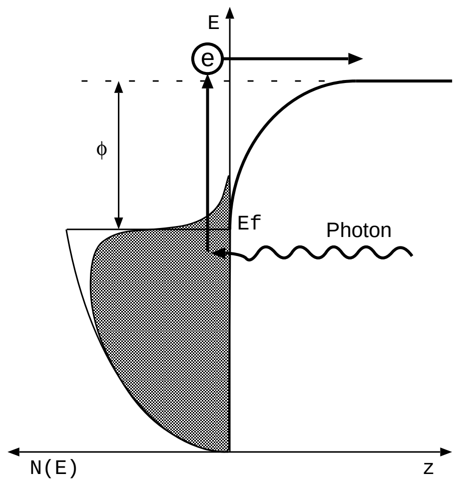


図 8.5 光電子放出機構．光子により励起された電子が真空中へ放出される．定義等は図 8.1 と同様．

真空障壁を越えるためのエネルギー源が熱エネルギーか光子のエネルギーかという違いはあるが, 電子の放出機構としては熱電子放出とほぼ同じである．しかし実際に光電子放出を利用した電子銃 (光電陰極型 RF 電子銃など) を製作する場合, 陰極物質の選ぶ際の基準は熱電子銃の場合と全く異なる．

熱電子銃の場合は電子放出に用いられるエネルギーは供給される熱エネルギーに比べて無視できるような量であり, 陰極物質としては高温に耐えられるという条件が最も重要な性質である．一方, 光電陰極の場合は光としてレーザー光のような操作性の高い光源を用いるのがふつうである．そのような操作性の高い光源を用いることで, 例えば小スポットから大電流の短パルス電子ビームを生成することが可能となり, 光電効果によるビーム生成の大きな利点である．そのためにはレーザー光にたいして効率良く電子を発生させるような物質が望ましい．すなわち光子あたりに発生する電子数を量子効率として定義し, この量子効率が高い物質が光電陰極として適当な物質である．

以下, 金属および直接遷移型半導体を例にとり, 光電子発生およびそのビーム品質について説明する．

8.3.1　金属における光電子放出

今金属表面に波長 ν の光を照射したときに発生する電流を考える．電流が発生するためにはもともと電子がもっていたエネルギー E と光のエネルギー $\hbar\omega$ の和が真空準位 E_0 よりも高い必要がある。すなわち

$$E + \hbar\omega > E_0. \tag{8.50}$$

低温の極限で、電子の持つエネルギー E の最大値はフェルミエネルギー μ に等しいので、$E \sim \mu$ とすると、式 (8.50) は

$$\hbar\omega > E_0 - \mu = \phi \tag{8.51}$$

である．この値は光電効果が生じる光の波長の閾値を与える。ここで、ϕ は仕事関数である。

今、$\hbar\omega$ の光による光電効果を考える。式 (8.50) より、電子の z 方向の運動エネルギーは $E_z > E_0 - \hbar\omega$ の条件を満たさなければならない。これを速度に置き換えると

$$v_{z0} = \sqrt{\frac{2(E_0 - \hbar\omega)}{m}}, \tag{8.52}$$

となる。すなわち、電子の z 方向の速度は v_{z0} よりも大きくなければならない。これを考慮すると、光電効果による光電流は式 (8.37) を若干修正して

$$J = Pe\int_{v_{z0}}^{\infty} dv_z \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \frac{2m^3}{h^3} \frac{v_z}{1 + \exp\frac{E-\mu}{kT}}, \tag{8.53}$$

と表される．ここで P は物質中の電子が光子により励起される確率である．現実的ではないが, 仮にすべての電子が一斉にある波長の光子を吸収して励起状態に遷移したとすると, $P = 1$ であるから, 放出電流は Richardson-Dushman の式で表される．ただし熱運動のエネルギーに加えて, 光子がエネルギーを電子に与えるので, 積分範囲の下限が E_0 ではなく, $E_0 - h\nu$ となり, 同じ温度で比べれば放出電流は大幅に増加する．v_{z0} が速度におけるその下限値．式 (8.53) において, まず $v_{x,y}$ についての積分を実施する．電界放出の時と同様に積分の公式

$$\int \frac{1}{1 + e^{-(ax+b)}} dx = \frac{1}{a} \log\left(1 + e^{ax+b}\right) dx \tag{8.54}$$

を使用すると

$$J = \frac{4\pi e m^2 PkT}{h^3} \int_{v_{z0}}^{\infty} dv_z v_z \ln\left[1 + \exp\left(\frac{\mu - E_z}{kT}\right)\right], \tag{8.55}$$

となる．積分変数を E_z に変更すると

$$J = \frac{4\pi e m PkT}{h^3} \int_{E_0-\hbar\omega}^{\infty} dE_z \ln\left[1 + \exp\left(\frac{\mu - E_z}{kT}\right)\right], \tag{8.56}$$

ここで

$$y = \frac{E_z + \hbar\omega - E_0}{kT} \tag{8.57}$$

$$\sigma = \frac{\hbar\omega - \phi}{kT}, \tag{8.58}$$

と変数変換すると, 式 (8.56) は

$$J = \frac{4\pi e m P k^2 T^2}{h^3} \int_0^{\infty} dy \ln\left[1 + \exp(\sigma - y)\right], \tag{8.59}$$

となる．この式の積分は σ の関数と考えられるので、次のように $f(\sigma)$ とおこう．我々の関心はこの $f(\sigma)$ を求めることにある。

$$f(\sigma) \equiv= \int_0^\infty dy \ln\left[1+\exp(\sigma-y)\right]. \tag{8.60}$$

まず $\sigma < 0$ の場合, すなわち光子のエネルギーが仕事関数よりも小さい場合について考えよう．この時 $\exp(\sigma - y) << 1$ となるので、関数を次のように Taylor 展開する．

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \tag{8.61}$$

この式に $x = \exp(\sigma - y)$ とおいたものを式 (8.60) に代入すると

$$f(\sigma) \equiv= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{n\sigma} \int_0^\infty dy e^{-ny}, \tag{8.62}$$

項別積分を行うと、次式を得る．

$$f(\sigma) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} e^{n\sigma} \quad (\sigma < 0) \tag{8.63}$$

$\sigma > 0$ の場合は次のように積分を分割する。

$$f(\sigma) = \left(\int_0^\sigma + \int_\sigma^\infty\right) dy \ln\left(1+e^{\sigma-y}\right), \tag{8.64}$$

ここで、第一項目の積分については、$\sigma - y = w$ と変数変換をおこない、

$$\begin{aligned}\int_0^\sigma dy \ln(1+e^{\sigma-y}) &= \int_0^\sigma dw \ln(1+e^w),\\ &= \int_0^\sigma dw \ln\left[e^w(1+e^{-w})\right],\\ &= \int_0^\sigma dw \left[w + \ln(1+e^{-w})\right],\end{aligned} \tag{8.65}$$

積分中の第一項は直接積分が可能である。また第二項目は $e^{-w} \ll 1$ として式 (8.61) と同様に展開してやると、

$$\int_0^\sigma dy \ln(1+e^{\sigma-y}) = \left[\frac{w^2}{2}\right]_0^\sigma + \left[\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-nw}\right]_0^\sigma = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n\sigma} \tag{8.66}$$

と求めることができる。次に第二項目の積分については $\sigma - y = -x$ として変数変換をおこなうと

$$\int_\sigma^\infty dy \ln\left(1+e^{\sigma-y}\right) = \int_0^\infty dx \ln(1+e^{-x}), \tag{8.67}$$

ここでも、式 (8.61) と同様に展開してやると、積分結果は

$$\int_\sigma^\infty dy \ln\left(1+e^{\sigma-y}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = \frac{\pi^2}{12}, \tag{8.68}$$

となる．この式 (8.66) と (8.68) の合計をとり、

$$f(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n\sigma} \quad (\sigma > 0), \tag{8.69}$$

と $f(\sigma)$ をもとめることができた．これまでをまとめると

$$J = \frac{4\pi em}{h^3} Pk^2T^2 \begin{cases} e^\sigma - \frac{1}{2^2}e^{2\sigma} + \frac{1}{3^2}e^{3\sigma} - \ldots & \sigma < 0, \\ \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\sigma^2 - e^{-\sigma} + \frac{1}{2^2}e^{-2\sigma} - \ldots & \sigma > 0, \end{cases} \tag{8.70}$$

と表すことができる。σ を再掲しておくと、

$$\sigma = \frac{\hbar\omega - \phi}{kT}, \tag{8.71}$$

である．式 (8.70) を Fowler の式という．

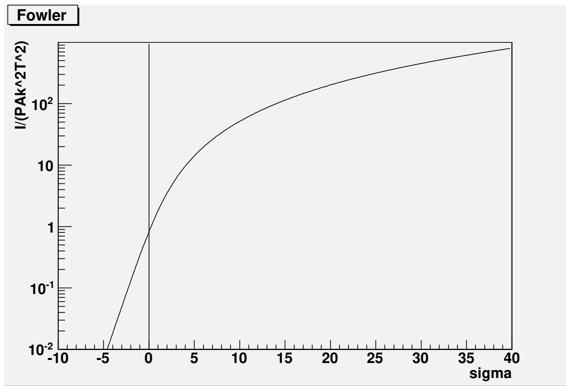


図 8.6　光電流を $PAek^2T^2$ で規格化し対数表示した、Fowler プロット。

図 8.6 に Fowler の式を示す。横軸は σ で、縦軸は光電流を PAk^2T^2 で規格化した値を対数表示したものである。これより仕事関数に相当する $\sigma = 0$ で関数の様子が変化しているのがわかる。金属であれば、その特性は仕事関数と光遷移確率によりほぼ決まり，　このように表された Fowler プロットはユニバーサルなものであると考えられる。そこから、このプロットを実測し、データーとカーブを当てはめることで未知の仕事関数を求めることができる．

Fowler の式 (8.70) の $\sigma = 0$ 付近での振舞を見てみよう。仕事関数以下の領域、すなわち $\sigma < 0$ では級数

$$f(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{n\sigma}, \quad \sigma < 0 \tag{8.72}$$

となっている。この級数の値は $\sigma = 0$ で $\pi^2/12$ に収束し、$\sigma < 0$ では図で示されているように急激に減少するが、ゼロにはならない。他方、$\sigma > 0$ の領域では

$$f(\sigma) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\sigma^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n\sigma}, \qquad \sigma > 0 \tag{8.73}$$

となっている。級数は $\sigma = 0$ で $-\pi^2/12$ に収束するから、$\sigma = 0$ での値はこの式でも $\pi^2/12$ へと収束し、$\sigma < 0$ と連続であることがわかる。ついでに微分係数を比較してみても連続となっていることがわかり、Fowler の式は $\sigma = 0$ でちゃんと解析接続している。ところで、$\sigma = 0$ 近傍の $\sigma > 0$ の領域での振舞は、級数が $-\pi^2/12$ に収束していることから

$$f(\sigma) \sim \frac{\pi^2}{12} + \frac{\sigma^2}{2}, \qquad \sigma > 0, \tag{8.74}$$

となる。論文等で量子効率が $\eta \propto (\hbar\omega - \phi)^2$ と示している例がある。光の波長に対する量子効率は上記のように二乗の依存性をもっているが、定数項があり、完全な比例関係にあるわけではない。量子効率が二乗に比例しているというのは定数項を無視した近似における関係であり、その大小関係において成り立つ近似的な関係式であることを注意しておく．

問題 4-3. Fowler plot がユニバーサルであるとする意味は何か述べよ．

8.3.2　金属光陰極における初期エミッタンス

光陰極から放出された電子ビームは, レーザーなど光電効果に使用した光源の大きさと等しい実空間広がりを持つ. また, 運動量空間においても一定の広がりを持ち, それゆえ固有のエミッタンスを有する．ビームが発生時点で持っ

ている固有のエミッタンスという意味では熱陰極における ε_{Th}, すなわち熱エミッタンスと同じであり, 陰極から放出された電子が有している熱的な運動により生じるものである．陰極から光電効果により放出された電子は, カソードの熱運動 (温度) による運動に加えて, レーザーによる寄与も考えなくてはならない．熱陰極における熱エミッタンスと区別する意味で初期エミッタンスともいわれる．

以下, 光陰極における横方向空間のエミッタンスを評価する．　縦方向のエネルギーを ϵ_z, 横方向のエネルギー (x 方向と y 方向の和) を ϵ_r とおくと, 平均の横方向エネルギー $\bar{\epsilon_r}$ は分布関数に ϵ_r をかけて積分することで求められる．すなわち

$$\bar{\epsilon_r} = \frac{4\pi m}{Nh^3}\int_{W-h\nu}^{\infty} d\epsilon_z \int_0^{\infty} d\epsilon_r \frac{\epsilon_r}{e^{(\epsilon_z+\epsilon_r-\mu)/kT}+1}, \tag{8.75}$$

となる．ここで $W = \mu + \phi$ は真空準位に相当するエネルギー, $h\nu$ はレーザー光子のエネルギーである．積分を実行するためまず $T = 0$ とおくと式 (8.75) は

$$\bar{\epsilon_r} = \frac{4\pi m}{Nh^3}\int_{W-h\nu}^{\mu} d\epsilon_z \int_0^{\mu-\epsilon_z} d\epsilon_r \cdot \epsilon_r \tag{8.76}$$

となる．ϵ_z の積分範囲が μ までとなっているのは $T = 0$ では電子はフェルミ準位をこえる範囲には分布していないことを示している．この積分は簡単に実行可能で, 結果は次のようになる．

$$\bar{\epsilon_r} = \frac{4\pi m}{Nh^3}\frac{(h\nu-\phi)^3}{6} \tag{8.77}$$

また放出電子数 N は同様の積分より

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi m}{h^3}\int_{W-h\nu}^{\mu} d\epsilon_z \int_0^{\mu-\epsilon_z} d\epsilon_r \\ &= \frac{4\pi m}{h^3}\frac{(h\nu-\phi)^2}{2}, \end{aligned} \tag{8.78}$$

と求められるので, これを式 (8.77) に代入すると結局 $\bar{\epsilon_r}$ は

$$\bar{\epsilon_r} = \frac{h\nu-\phi}{3}, \tag{8.79}$$

と求められる．この結果は $T = 0$ として求めたもので, 熱による寄与は含まれていない．一般的に光電陰極は 300 K 程度の室温で使用されるので, 熱エネルギーは $2.6\times10^{-2}eV$ となる．一方多くの光電陰極では有限の量子効率を確保するためレーザーのエネルギーを仕事関数にたいして $0.1-0.5eV$ 程度高くとるのが普通であり, レーザーのエネルギーの寄与の方が約十倍程度大きい．従って $T = 0$ と仮定して求めた式 (8.79) は近似として充分有効である．

熱エネルギーだけの場合の横方向エネルギーへの寄与は式 (8.22) で表されているので, これを式 (8.79) に含めると次のようになる．

$$\bar{\epsilon_r} = \frac{h\nu-\phi}{3} + kT \tag{8.80}$$

この値は, x 方向と y 方向の運動エネルギーの和である．いずれかの方向の射影エミッタンスは

$$\varepsilon_{x,y} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{(h\nu-\phi)}{3mc^2}+\frac{kT}{mc^2}}, \tag{8.81}$$

とあらわされる．ここで R はレーザーのスポットサイズである．仕事関数 ϕ は表面電場 E があると Schottky 効果により

$$\sqrt{\frac{eE}{4\pi\epsilon_0}}, \tag{8.82}$$

だけ実質的に減少するので, 電場が無い状態での仕事関数 ϕ_0 を用いると

$$\phi = \phi_0 - C_s\sqrt{E}, \tag{8.83}$$

となる．ここで $C_s = \sqrt{e/4\pi\epsilon_0} = 3.79 \times 10^{-5}$ である．式 (8.83) を式 (8.82) に代入すると

$$\varepsilon_r = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{(h\nu - \phi_0 + C_s\sqrt{E})}{3mc^2} + \frac{kT}{mc^2}}, \tag{8.84}$$

となる．すなわち Schottky 効果により横方向エミッタンスへのレーザーエネルギーの寄与は更に増大する．

いまレーザーのスポットサイズを直径 2.0mm, 波長として 266nm(Nd:YAG の四倍高調波に相当) を仮定すると一光子のエネルギーは 4.67 eV, 陰極を銅と仮定するとその仕事関数はゼロ電場で 4.30eV. また表面電場を $E = 100MV/m$ とすると Schottky 効果による仕事関数の減少幅は 0.38eV である．従ってレーザーエネルギーの寄与は $\mathrm{h}\nu - \phi_0 + \mathrm{C_s}\sqrt{\mathrm{E}} = 0.75\mathrm{eV}$ となる．加えて陰極の温度を 300K とすると $\mathrm{kT} = 2.58 \times 10^{-2}\mathrm{eV}$ となるので, これらをまとめるとエミッタンスは $0.74[\pi\ mm.mrad]$ となる．

この結果から気づくことは熱運動による寄与よりもレーザーのエネルギーによる寄与が圧倒的に大きいことである．横方向の運動量だけでいえば 3000K 近くという高温で運転される熱電子銃のそれよりもレーザーのエネルギーのほうが倍以上大きくなっている．レーザーのエネルギーを仕事関数よりも大きくとらなければならない理由は量子効率を高めることにある．従って, レーザーの波長ど仕事関数の差が得られるビームのエミッタンスと輝度に大きく影響する．

問題 4-4. 式 (8.79) を導け．

8.4　直接遷移型半導体からの光電放出

前の節では金属からの光電子放出を取り扱った．金属ではフェルミ面付近をふくむ全てのエネルギー領域で準位が連続して存在している．それに対して半導体および絶縁体ではフェルミ準位付近にエネルギー準位が存在しない領域, すなわちバンドギャップがあり, その上下で電子のエネルギーバンド構造が大きく変化している．物質内の電子は低い準位からフェルミ準位までを満たしているので, 光電子放出に寄与するのは主にフェルミ準位付近の電子であり, フェルミ面付近の構造が重要となる．

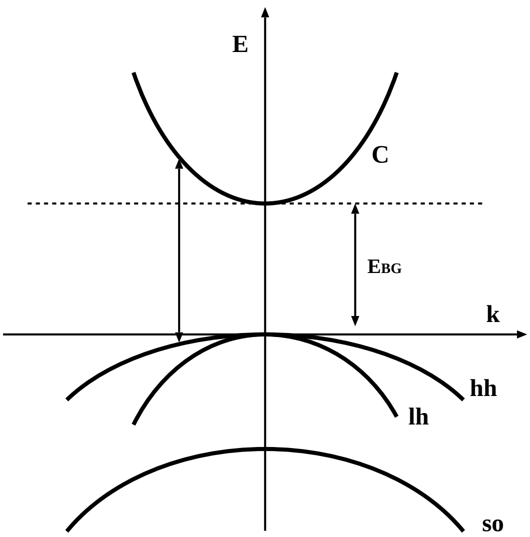


図 8.7　GaAs のバンド構造を模式的に表したもの．縦の線は光子による直接遷移の例として, 価電子帯から伝導帯にへ電子が励起されることを表している．

典型的な例として, 直接遷移型半導体の光電子放出を考える．このタイプの半導体のバンド構造は図 8.7 に示すような形をしている．この図では縦軸は準位のエネルギーで基準は荷電子帯の上端にとっている．横軸は電子の波数 k で

ある．原点より下のバンドは各々 heavy hole, light hole, そして spin orbit と呼ばれるバンド構造を表している．以下, バンド構造を有効質量により表す有効質量近似を用いて議論を進める．

光電効果の場合, 価電子帯にある電子が伝導帯へと励起され, その電子が真空準位よりもエネルギーが高い場合に電子放出が生じる．価電子帯から伝導帯への励起確率は行列要素, 状態密度, そして分布関数の積として表すことができる．　より一般的に状態 i から状態 f への遷移確率は, Fermi の黄金律により次のように与えられる．

$$W_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}|M|^2 D(\hbar\omega)f(E), \tag{8.85}$$

ここで M は行列要素であり, 始状態と終状態および反応を表すハミルトニアンから求められる．D が状態密度と呼ばれる量であり, 反応に寄与する状態数を表している．そして $f(E)$ はフェルミ分布関数で, ある温度でその状態に電子が存在する確率を表す．

まず一般的に状態密度 D について考察する．ある波数の大きさ（スカラー量）k をもつ状態数は, 三次元波数空間を考えると,

$$D(k)dk = 2\frac{1}{(2\pi)^3}4\pi k^2 dk, \tag{8.86}$$

と求められる．右辺の頭の 2 はスピン自由度を考慮したものである．エネルギー E と波数 k との関係は, 非相対論的電子を仮定すると

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}, \tag{8.87}$$

である．ここで m^* は物質中での電子の有効質量を表す．自由空間においては電子の質量そのものに等しいが, 結晶などの周期構造の中では電子の質量とは異なる．逆に, この電子の有効質量そのものが結晶の中における電子の波数 k とエネルギー E との間の関係, すなわち分散関係を与える．微分係数を求めると

$$\frac{dE}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{m^*}, \tag{8.88}$$

となる．これを用いて状態密度の変数を波数からエネルギーに変換すると

$$D(E) = D(k)\frac{dk}{dE} = \frac{k^2}{\pi^2}\frac{m^*}{\hbar^2 k} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E}, \tag{8.89}$$

となる．

さて, 図 8.7 に示されている各々のバンド構造の分散関係は有効質量を用いて以下のように与えられる．

$$E_c(k) = E_{BG} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e^*}, \tag{8.90}$$

$$E_{hh} = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{hh}^*}, \tag{8.91}$$

$$E_{lh} = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{lh}^*}, \tag{8.92}$$

$$E_{so} = -\Delta - \hbar^2 k^2 2m_{so}^*, \tag{8.93}$$

ここでは便宜的に有効質量を正にとり, 分散関係に負号を付けている．　光電子放出について考えるため, エネルギー $\hbar\omega$ の光子による価電子帯から伝導帯への遷移について考える．電子の波数を変化させない遷移を直接遷移, 波数を変化させる遷移を間接遷移という．バンドダイアグラでみると, 直接遷移は垂直方向の遷移, 間接遷移は斜め方向の遷移である．光子の波数は電子の波数に比べて桁違いに小さいことから, 波数が変化する遷移は光子の吸収に加えて, 格子や他の電子との散乱などの複数の反応を経なければならず, その反応確率は小さくなる．結果として, 光子による遷移は多くの場合, 直接遷移が支配的となる．ある種の半導体では伝導帯の底と価電子帯の天井が異なる波数に相当し, バ

表 8.2　GaAs 内の電子の有効質量. 各々のバンドにおける値を自由空間での電子の質量を単位として示してある.

質量	理論値	測定値
m_c^*	0.078	0.067
m_{hh}^*	0.73	0.53
m_{lh}^*	0.08	0.08

ンドギャップ相当の光による遷移はエネルギー的に間接遷移しかゆるされないため, 間接遷移のみが生じる場合もある. 文献 [81] よると GaAs 内における電子の有効質量は表 8.2 のように与えられる.

直接遷移を仮定すると, 光子のエネルギーと波数との関係は次のようになる.

$$\hbar\omega = E_{BG} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c^*} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_h^*}, \tag{8.94}$$

ここで, 換算質量 μ^* を

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{m_c^*} + \frac{1}{m_h^*}, \tag{8.95}$$

と定義すると, 分散関係は

$$\hbar\omega - E_{BG} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu^*}, \tag{8.96}$$

と与えられる. この分散関係から導かれる状態密度を結合状態密度という. この状態密度は, 通常の物質内部での電子状態を表す状態密度とは異なり, 始状態と終状態間の遷移の状態数をあらわしたもので, 結合状態密度と呼ばれる. エネルギー $\hbar\omega$ の光子による, 価電子帯と伝導帯との間の結合状態密度は

$$D(\hbar\omega) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2\mu^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\hbar\omega - E_{BG}}, \tag{8.97}$$

と導かれる. ここで, μ^* は結合状態密度における有効質量で, 価電子帯および伝導帯での電子の有効質量から決まる量で, 式 (8.95) で与えられる. E_{BG} はバンドギャップのエネルギー幅である. この時, 励起された電子のエネルギーは光子の波長により一意に決まり

$$E_e = E_c - E_{BG} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c^*} = (\hbar\omega - E_{BG})\frac{\mu^*}{m_c^*}, \tag{8.98}$$

となる. ここで電子のエネルギー E_e は伝導帯の底を基準に表している. これを波数で表すと

$$E_e = \frac{(\hbar k_x)^2}{2m_c^*} + \frac{(\hbar k_y)^2}{2m_c^*} + \frac{(\hbar k_z)^2}{2m_c^*}, \tag{8.99}$$

となる。今、E_e は光子のエネルギーに対して一意に決まるから、波数空間での電子分布は半径が一定の球殻に相当する。電子の出射方向、すなわち界面の法線ベクトルを z 方向にとり、ポテンシャル障壁の高さを伝導帯の底を基準にして χ とする. ポテンシャル障壁における反射などの量子効果を無視すると, 電子が真空中に飛び出す確率は $E_z > \chi$ で 1, $E_z < \chi$ で 0 となる. ここで E_z とは、運動エネルギーのうちの z 成分である。その閾値は $E_z = \chi$ として,

$$k_{z0} = \frac{\sqrt{2m_c^*\chi}}{\hbar}, \tag{8.100}$$

である。

今、考えている波数空間において、$k_z > k_{z0}$ の領域の電子のみが真空中へと放出されるので、その数を求めよう. 三次元波数空間において, 電子は次のように球殻上に分布している。

$$\frac{2m_c^* E_e}{\hbar^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \tag{8.101}$$

このうち、$k_z > k_{z0}$ である領域は, 次の積分でもとめられる。

$$S(k_z > k_{z0}) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\alpha} d\theta \sin\theta \frac{2m_c^* E_e}{\hbar^2} = 2\pi \frac{2m_c^* E_e}{\hbar^2} (1 - cos\alpha), \tag{8.102}$$

ここで、$\alpha = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\chi}{E_e}}$ であり, $k_z = k_{z0}$ となる頂角に相当する．これを代入すると

$$S(k_z > k_{z0}) = 2\pi \frac{\sqrt{2m_c^* E_e}}{\hbar} \left(1 - \sqrt{\frac{\chi}{E_e}}\right), \tag{8.103}$$

となる．全体では電子の占める波数空間面積は $4\pi 2m_c^* E_e/\hbar^2$ なので, これで規格化すると伝導帯に励起された電子の放出確率 $P(\hbar\omega)$ が求められる．

$$P(\hbar\omega) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\chi}{E_e}}\right), \tag{8.104}$$

式 (8.97) の結合状態密度 $D(\hbar\omega)$ と, この伝導帯から真空への脱出確率 $P(\hbar\omega)$ の積に, 入射光子数, 光遷移確率, 行列要素, を掛け合わせると光電流が得られる．量子効率 η は入射光子数で規格化した光電流なので, 単独のバンドからの遷移だけが生じる場合には量子効率は $D(\hbar\omega)$ と $P(\hbar\omega)$ の積に比例する. すなわち

$$\eta(\hbar\omega) \propto \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2\mu^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left(\sqrt{\hbar\omega - E_{BG}} - \sqrt{\chi\frac{m_c^*}{\mu^*}}\right). \tag{8.105}$$

実際の量子効率は温度による分布関数の影響, 不純物による状態密度の変化とそれによるフェルミ準位の変化, 複数のバンドからの遷移, 真空ポテンシャルでの量子力学的な反射等の効果, などにより複雑な振舞をみせるが, 定性的な性質はおおよそ上式で記述される.

問題 4-5. 式 (8.105) を導け.

8.4.1 半導体陰極における初期エミッタンス

半導体における光電子放出に続いて, 予想される平均横方向エネルギーおよびそれによるエミッタンスについて考察しよう．伝導帯への励起までは前節においてすでに議論しているので, 横方向エネルギーの平均値 $\overline{E_t}$ はすぐに求めることができる. 一般的な意味で, 横方向エネルギーは

$$\overline{E_t} = \frac{\int dk^3 E_{xy}}{\int dk^3}, \tag{8.106}$$

ここで積分は考えている波数空間全体について積分をとることを表している．今, 電子は波数空間において半径 $|k| = \sqrt{2m_c^* E_e}/\hbar$ の球殻上に分布している．　また真空中へ放出される電子は, 式 (8.100) で与えられる k_{z0} を用いて $k_z > k_{z0}$ という条件を満たすものであるので, これに相当する波数空間で積分をとり $\overline{E_t}$ を求めてやればよい．分母となる規格化因子の積分は既に式 (8.103) でおこなっている．分子となる積分は

$$I_{num} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\alpha} d\theta \frac{2m_c^* E_e}{\hbar} \sin\theta E_{xy}, \tag{8.107}$$

と与えられる．E_{xy} は $k_z = |k|\cos\theta$ より

$$E_{xy} = E_e - E_z = E_e - \frac{(\hbar k_z)^2}{2m_c^2} = E_e(1 - \cos^2\theta), \tag{8.108}$$

を代入すると次式を得る.

$$I_{num} = 2\pi \frac{2m_c^* E_e^2}{\hbar} \int_0^{\alpha} d\theta \sin\theta (1 - \cos^2\theta). \tag{8.109}$$

積分を実行するために, $t = \cos\theta$ と置換すると, 結果として次式を得る.

$$I_{num} = 2\pi \frac{2m_c^* E_e^2}{\hbar} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\chi}{E_e} \right)^{3/2} - \left(\frac{\chi}{E_e} \right)^{1/2} + \frac{2}{3} \right]. \tag{8.110}$$

これらの結果より

$$\overline{E_t} = E_e \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{\chi}{E_e}\right)^{3/2} - \left(\frac{\chi}{E_e}\right)^{1/2} + \frac{2}{3}}{1 - \sqrt{\frac{\chi}{E_e}}}, \tag{8.111}$$

を得る.　$\overline{E_t}$ は横方向運動エネルギーの合計なので, 一軸あたりの平均のエネルギー $\overline{E_{x,y}}$ はこの半分であり

$$\overline{E_{x,y}} = \frac{E_e}{2} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{\chi}{E_e}\right)^{3/2} - \left(\frac{\chi}{E_e}\right)^{1/2} + \frac{2}{3}}{1 - \sqrt{\frac{\chi}{E_e}}}, \tag{8.112}$$

である. この値から予測される横方向規格化エミッタンスは

$$\varepsilon_{x,y} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{2\overline{E_{x,y}}}{m_0 c^2}}, \tag{8.113}$$

となる.　およその大きさを評価するために $\chi = 0$ としてみると, エネルギーとエミッタンスは

$$\overline{E_{x,y}}(\chi = 0) = \frac{1}{3}(\hbar\omega - E_{BG}) \frac{\mu^*}{m_c^*}, \tag{8.114}$$

$$\varepsilon_{x,y}(\chi = 0) = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{2(\hbar\omega - E_{BG})}{3m_0 c^2} \frac{\mu^*}{m_c^*}}, \tag{8.115}$$

のように求められる. この式から, エミッタンスはおよそ $\hbar\omega - E_{BG}$ の二乗根に比例するという金属カソードと同様の振舞をすることが予想される. 図 8.8 に横方向運動エネルギー $\overline{E_{xy}}$ を χ/E_e の関数として示してある.χ が増加するにしたがって $\overline{E_{xy}}$ が減少することが予想される.

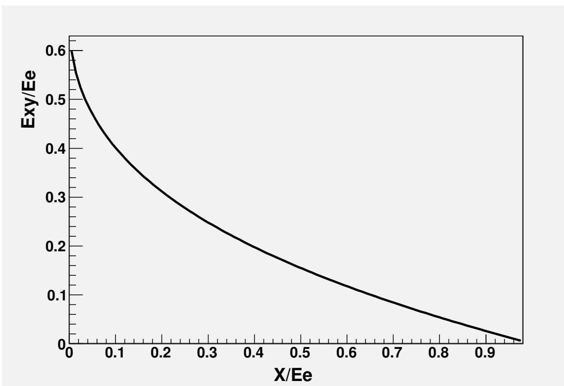


図 8.8　E_e で規格化した平均横方向エネルギーを χ/E_e の関数として表したもの.

問題 4-6. 式 (8.115) を導け.

8.4.2　表面屈折の効果

半導体のバンド構造等は結晶構造, すなわち構成原子が規則的に配列していることから生じるものである. 結晶構造は回転対称性や並進対称性を持っており, それらの性質から特徴的なバンド構造がつくり出される. 一方, 光電陰極

の電子発生面は物質と真空という異なる空間が接しており, このような面を界面といい, 結晶構造の中に存在するような対称性は崩れている. 界面をもつ物質の性質はそれだけでひとつの大きな学問分野となるため, それを包括的に扱うには筆者の手に余るが, ここでは電子の有効質量の変化のみに着目して, 放出電子における影響を考察する.

有効質量は物質内部において電子の分散関係を定義する値であり, 真空中での電子の質量とは異なる値をとる. 電子が物質中から真空中へ放出される場合でも, 横方向運動量およびエネルギーはその前後で保存しなくてはならない. この原理から以下のように放出時における屈折法則が導かれる.

伝導帯でのエネルギー E_c は波数 $\boldsymbol{k_c}$ や有効質量 m_c^* を用いて

$$E_c = \frac{\hbar^2 k_{xc}^2}{2m_c^*} + \frac{\hbar^2 k_{yc}^2}{2m_c^*} + \frac{\hbar^2 k_{zc}^2}{2m_c^*} = (\hbar\omega - E_{BG})\frac{\mu}{m_c^*}, \tag{8.116}$$

と記述される. 同様に自由空間においてエネルギー E_f は

$$E_f = \frac{\hbar^2 k_{xf}^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_{yf}^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_{zf}^2}{2m} \tag{8.117}$$

と記述される. 横方向運動量の保存より

$$\hbar k_{xc} = \hbar k_{xf} \tag{8.118}$$
$$\hbar k_{yc} = \hbar k_{yf}, \tag{8.119}$$

またエネルギー保存より

$$E_c = E_f, \tag{8.120}$$

が成り立たなくてはならない. これらの条件より, 自由空間での z 方向のエネルギー E_{zf} は

$$E_{zf} = \frac{\hbar^2 k_{zf}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_{zc}^2}{2m_c^*} + (\frac{1}{2m_c^*} - \frac{1}{2m})(\hbar^2 k_x^2 + \hbar^2 k_y^2), \tag{8.121}$$

となり, 物質中での z 方向のエネルギー E_{zc} よりも増大する. 電子放出の閾値として E_{zc} と E_{zf} のどちらを用いるべきかは明らかではないが, 仮に E_{zf} が電子親和性 χ よりもおおきければ真空中への放出が生じると考えることにしよう. 伝導帯での波数空間での z 軸からの角度を θ と定義し, 伝導帯での波数の大きさを k_c とすると

$$\frac{\hbar^2 k_{zf}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_c^2}{2m_c^*} - \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2) = \frac{\hbar^2 k_c^2}{2}(\frac{1}{m_c^*} - \frac{1}{2m}\sin^2\theta) \tag{8.122}$$

という条件が成り立つ. 電子が放出されるために θ の満たすべき条件は

$$\sin^2\theta \leq \frac{m}{m_c^*} - \frac{2m\chi}{\hbar^2 k_c^2}, \tag{8.123}$$

となる. chi の値が小さければ, $m/m_c^* > 1$ より, 波数空間のうち k_{zc} が正の値を持つ半球, すなわち $0 < \theta\pi/2$ において電子放出が生じる. この臨界角を α とすると伝導帯電子の放出確率は

$$\eta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\alpha} d\theta sin\theta = \frac{1}{2}(1 - cos\alpha), \tag{8.124}$$

アルファは次のように与えられる.

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{m}{m_c^*} - \frac{2m\chi}{\hbar^2 k_c^2}}. \tag{8.125}$$

この時, 横方向エネルギーは次のように与えられる.

$$E_{xy} = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_c^2}{2m}\sin^2\theta = \frac{\mu}{m}(\hbar\omega - E_{BG})\sin^2\theta. \tag{8.126}$$

この値は x と y についての和である．放出電子の平均をとると

$$\overline{E_{xy}} = \frac{1}{4\pi\eta}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta \frac{\mu}{m}(\hbar\omega - E_{BG})\sin^2\theta = \frac{\mu}{m}(\hbar\omega - E_{BG})\frac{\frac{1}{3}\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{2}{3}}{1-\cos\alpha}, \tag{8.127}$$

となる．x あるいは y の平均はこの半分となるので, 一自由度あたりの横方向エミッタンスは

$$\varepsilon = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{2\overline{E_{x,y}}}{mc^2}} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{\mu}{m^2c^2}(\hbar\omega - E_{BG})\frac{\frac{1}{3}\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{2}{3}}{1-\cos\alpha}}, \tag{8.128}$$

となる．ここで比較のために $\chi = 0$ とおくと $\alpha = \pi/2$ なので,

$$\varepsilon = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{2\overline{E_{x,y}}}{mc^2}} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{2\mu}{3m_0^2c^2}(\hbar\omega - E_{BG})}, \tag{8.129}$$

という結果を得る．この値は式 (8.115) と比べると $\sqrt{m_c^*/m_0}$ だけエミッタンスを減少させる効果として表れる．

8.4.3　光電陰極物質

Fowler プロットは放出電流のレーザーの波長依存性を示すものである．他方, 放出電流の絶対値を求めるには, Fowler の式において, 電子が励起される確率 P というものを求める必要がある．しかしこの値を求めるのは単純ではない．この定数には物質表面での光学反射率, 物質内部での光学吸収, が含まれており, その定数を予測することは一般的に困難である．

そこで一般的には Fawler の式を用いるかわりに, 実用的なパラメーターである量子効率 η というものを定義して, 光電子放出電流を定式化する．量子効率とは光子が物質に入射したときに, 物質表面から光電子が放出される確率である．量子効率を用いて, 放出電流は

$$J = e\eta N_{ph}, \tag{8.130}$$

とあらわされる．ここで N_{ph} は入射光子数である．量子効率は理論的に予測するのは一般的には困難であり, 実際の測定値から求められる．　空間電荷制限領域に達していない場合, 光電効果により得られるビーム電荷 Q は

$$Q = \frac{\eta e P_l \lambda_L}{hc}, \tag{8.131}$$

と与えられる．ここで η は物質の量子効率, e は素電荷, P_l はレーザーの出力, λ_L はレーザーの波長, h はプランク定数である．物理定数を代入し, 実用的な単位で表示すると

$$Q[nC] = 8.08 \times 10^{-3}\eta[\%]P_l[\mu J]\lambda_L[nm], \tag{8.132}$$

となる．

実際には光電効果による放出電流は空間電荷効果や鏡映電荷などによるショットキー効果などにより影響をうける．例えば, 以下のようなパラメーターが影響する．

- バイアス電圧：陰極の表面電場はショットキー効果により実効的な仕事関数に影響を与える．従って, 量子効率は表面電場の増加関数となる．
- 引き出し電流：引き出し電流によって電荷密度が高まると, 空間電荷効果により表面電場が減少する．この表面電場の減少はショットキー効果を通じて, 仕事関数の減少, 量子効率の減少をもたらす．
- スポット径：レーザーやランプ光などのスポット径を小さくすると, 空間電荷効果を強めることになり, 量子効率の減少をもたらす．

以上から, 陰極のゼロバイアス時の量子効率の測定のためには, 引き出し電圧をなるべく低く設定し, 照射する光子密度をなるべく低くすることが重要である. 測定される量子効率は条件により異なるので, 陰極が電子銃内に設置された状態での量子効率と, ゼロバイアス時のそれとは異なる. レーザーのパワー見積もりなでにおいては, 以上のように現実の運転条件を考慮したうえで必要なパワーを求めるべきである.

式 (8.74) に示されているように, 量子効率は Fowler の式の近似 (式より, 仕事関数 ϕ などを用いて

$$\eta = A\left[h\nu - \phi + \sqrt{\frac{eE}{4\pi\epsilon_0}}\right]^2, \tag{8.133}$$

のように与えられる [28]. ここで A は物質や表面状態などにより決定される定数, ν はレーザーの振動数, E は陰極表面の電場の大きさで Schottky 効果を表している. このように量子効率は陰極物質の仕事関数, レーザーの波長, 表面電場によって変化する. 実際の量子効率の測定においては電流を表面電場の関数として求め, 式 (8.132) より量子効率へと変換する. 電場の弱いところでは陰極表面における空間電荷により電流が制限されるので正しく量子効率を測定できないため, 得られたデータに式 (8.133) を当てはめてゼロ電場での量子効率を求める.

定数 A は物質の種類, 表面状態, レーザーの入射角, 偏光などによって大幅に変化するので, いちがいに仕事関数の低い物質が量子効率が高いとはいえない. 例えば亜鉛 (Zn) とマグネシウム (Mg) の仕事関数は各々 3.70, 3.66 eV とほどんど変わらないが, 測定によると量子効率は 1.4×10^{-5}, 6.2×10^{-4} と 50 倍近く異なる [28].

表 8.3　主な光電陰極物質の量子効率とそれが得られた時の条件など. λ_L はレーザーの波長. laser activation とは 2 ~ 5mJ/cm^2 程度のレーザーを五分から十分程度材料の表面に照射するという処理. 表面に形成された酸化物皮膜, あるいは吸着した不純物等をとり除くことで量子効率が上昇すると言われているが詳しい物理的過程は不明である. [29] から抜粋したものに加筆し作成.

物質	量子効率 [%]	条件等
純金属		
Al	3.2×10^{-3}	$\lambda_L = 266nm$
Au	4.7×10^{-3}	$\lambda_L = 266nm$, laser activation
Cu	2.2×10^{-4}	$\lambda_L = 266nm$
Cu	4.2×10^{-2}	$\lambda_L = 213nm$
Mg[30]	1.5×10^{-1}	$\lambda_L = 260nm$
Sm	7.2×10^{-2}	$\lambda_L = 266nm$, laser activation
アルカリ系金属		
Cs_3Sb	2	$\lambda_L = 266nm$
K_3Sb	1.6	$\lambda_L = 266nm$
Na_2KSb	6.1	$\lambda_L = 266nm$
$CsKSb$	30	$\lambda_L = 350nm$
CsI	6.8	$\lambda_L = 213nm$
Cs_2Te	5.7	$\lambda_L = 266nm$

RF 電子銃に用いられる光電陰極に用いられる物質としてはおおきく分けて金属とアルカリ系金属がある.

純金属は一般的に量子効率は $10^{-3} \sim 10^{-6}$ と低いが堅牢であり, RF 空洞のなかで長時間使用に耐えられるのが特長である. また大気への暴露などにたいしても鈍感であり, 取扱が簡単なのも利点である. その中で Mg カソードは

260nm の光に対して, 0.15 % という金属陰極においては際立って高い量子効率を示している [30]. 超高真空中においてカソード表面にレーザーを照射し, 表面にある不純物を除去することで, 高い量子効率が得られる, と報告されている.

アルカリ系金属陰極は, 通常タングステンなどの基体金属上に Cs, K, Na などのアルカリ金属薄膜を形成したものであり, Cs_2Te, Cs_3Sb, $Cs-K-Sb$, $Cs-Na-Sb$ 等が知られている.　500nm 以下の可視光から紫外域における量子効率の高さが最大の特長である. 図 8.9 に Cs_3Sb および $K-Cs-Sb$ カソードの量子効率の波長依存性を示す. この図からわかるように, Cs_3Sb および $K-Cs-Sb$ は 10% を越える高い量子効率を示している. アルカリ金

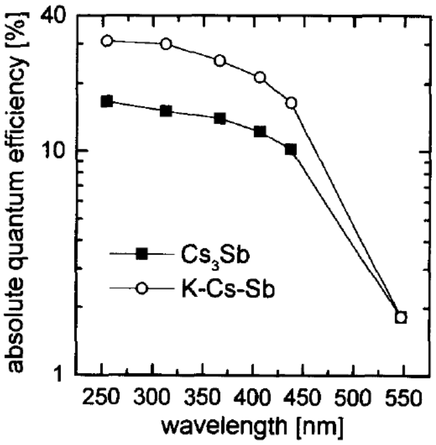


Fig. 3. Typical absolute quantum efficiency spectra of Cs_3Sb and K–Cs–Sb reflective photocathodes, prepared in this work.

図 8.9　Cs_3Sb および $K-Cs-Sb$ カソードの量子効率の波長依存性. [31]

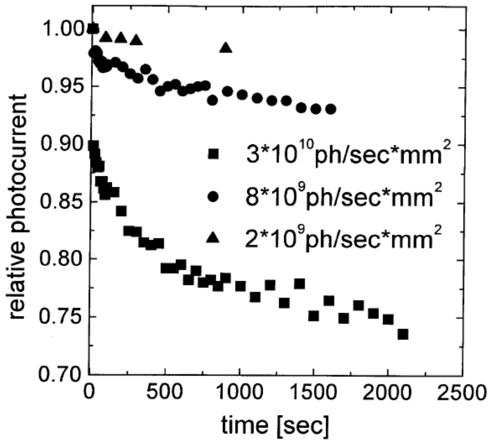


Fig. 5. Upcharging of a K–Cs–Sb photocathode coated with 300 Å of CsBr, in 1 atm CH_4. Shown is the relative photocurrent of the photocathode as a function of exposure time to photon flux of 2, 8 and 30×10^9 photons/s mm^2.

図 8.10　KCsSb カソードの量子効率の減少曲線. 高い引き出し電流の場合ほど減少が顕著である. [31]

属系カソードの欠点は, 金属カソードに比べて脆弱であり取扱いが難しいところにある. 真空中に残留ガスとして存在する酸素や水との反応, あるいは発生した電子によりイオン化した残留ガス分子の逆流衝突 (Back bombardment) などによる量子効率の減少が観測されている. 図 8.10 は量子効率の減少曲線を時間の関数として示したものである. 引き出し電流密度が高い場合ほど減少幅が大きくなっていることがわかる. 図 8.11 および 8.12 に, KCsSb カソードを酸素および水に曝露した後の量子効率を示す. これらのデータから, KCsSb カソードは酸素および水に各々 4×10^{-1}Pa.sec により破壊され, 数時間から数日で寿命を迎える. また大気への暴露により酸化などの変化により陰極としての働きを失う. そのために真空中で基体金属にアルカリ金属を塗布し, 真空を保ったまま RF 電子銃に装着するという非常に手のこんだ装置が必要となる.

表 8.3 に代表的な光電陰極物質の量子効率とそれが得られた条件を掲載する.

NEA GaAs 陰極

1970 年代より SLAC において偏極電子源の開発研究が行われ, 1970 年代末には半導体陰極を用いた偏極電子銃が実用化された. 偏極電子は核子のスピン構造の実験的解明や素粒子の標準模型の実験的検証のハイライトである SLAC Linear Collider, SLC における Weinber 角の精密測定を可能たらしめるなど実験物理学に大きな役割を演じてきた. また, ILC においても, 電子ビームの偏極は物理実験の条件として強く要請され, 基本設計である

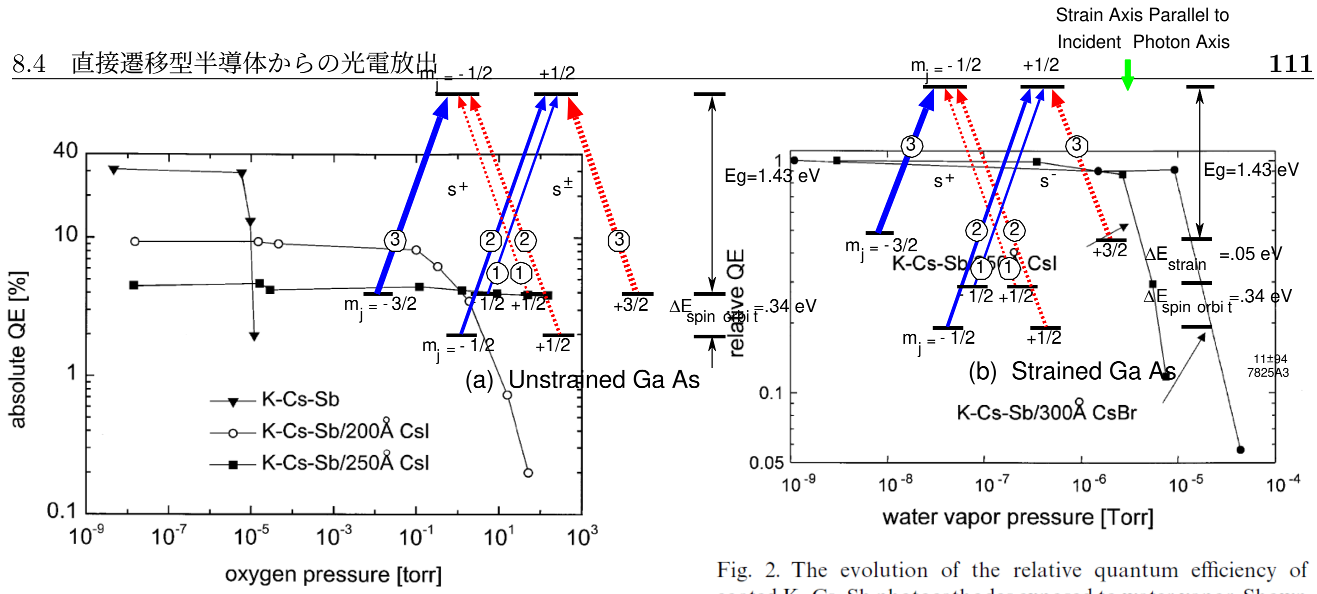


Fig. 1. The evolution of the absolute quantum efficiency of K–Cs–Sb photocathodes exposed to oxygen. Shown are the results of uncoated and coated photocathodes with 200 Å and 250 Å thick CsI films, as a function of the residual oxygen pressure. Each data point represents 5 min of exposure to oxygen, followed by quantum efficiency measurement in vacuum.

Fig. 2. The evolution of the relative quantum efficiency of coated K–Cs–Sb photocathodes exposed to water vapor. Shown are the results of photocathodes coated with 300 Å thick CsBr and 250 Å thick CsI films, as a function of the residual water vapor pressure. Each data point represents 5 min of exposure to water vapor, followed by quantum efficiency measurement in vacuum.

図 8.11 KCsSb カソードを O_2 に曝露した場合の量子効率．各分圧について 5 分間暴露した後に 312nm の光で量子効率を測定．[32]

図 8.12 KCsSb カソードを H_2O に曝露した場合の量子効率．各分圧について 5 分間曝露した後に 312nm の光に対する量子効率を測定．減少が顕著である．[32]

図 8.13 GaAs のバンド構造と伝導帯への光子による励起の様子．(a) はバルクの GaAs 結晶，(b) はゆがみ GaAs 結晶についての図．角運動量 3/2 状態の縮退が歪みによって解かれている．

RDR(Reference Design Report)[20] においても，偏極電子ビームとすることが決定されている．

偏極電子は GaAs という半導体結晶に円偏光したレーザー光 (Ti:Sa 波長 700 ∼ 800nm) を照射し，光電効果により発生した電子を DC 電場で引き出すことで得られる．

図 8.13 に Bulk GaAs 結晶のバンド構造が示されている．GaAs 結晶は最外殻に角運動量 3/2 の荷電帯を有している．このバンドと伝導帯とのエネルギー差に相当する光子により価電子を励起して，ビームとして取り出す．伝導帯の自由電子はヘリシティ ±1 の状態しかとりえないために，光子が円偏光していると角運動量保存の法則から遷移が選択的となる．

右巻きの光子による励起を仮定しよう．図 8.13(a) において実線で示されている遷移が右巻き光子によるものである．光子のエネルギーを 1.43eV 以上，1.77eV 未満に設定すると $J = \frac{1}{2}$ の準位からの遷移は強く抑制されるため，

$J=\frac{3}{2}$ の $m=-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$ 状態からの遷移のみが可能となる．$J=\frac{3}{2}$ 準位の状態密度は Clebsh-Gordon 係数により $m=-\frac{3}{2}$ と $m=-\frac{1}{2}$ が 3:1 となっている．従って伝導帯に得られる電子のうち 75% は $m=-\frac{1}{2}$, 25% は $m=+\frac{1}{2}$ 状態となる．

ビームの偏極度は

$$P=\frac{N_+-N_-}{N_++N_-} \tag{8.134}$$

のように定義される．ここで $N_\pm$ は電子のヘリシティ状態の密度である．したがって, GaAs 陰極に偏極光子を照射して得られる電子の偏極度は 50% となる．

得られる電子ビームの偏極度はスピン-軌道角運動量の合成状態である $J=\frac{3}{2}$ 状態の密度によって決まっている．これは量子力学で決まっているために変更することは不可能である．したがって偏極度 50% は理論的限界値であり, バルク GaAs を使用する限りこれを上回ることは不可能である．

50% を越える偏極度は GaAs 結晶の対称性を破り, $J=\frac{3}{2}$ 状態の縮退を解くことによって得られた．SLAC と名古屋大学によって歪み薄膜と超格子薄膜という二つの方法が縮退を解くための方法として開発された．縮退が解けた状態の GaAs 結晶のバンド構造が図 8.13(b) に示されている．縮退が解けたことにより $J=\frac{3}{2}$ の $m=\pm\frac{3}{2}$ と $m=\pm\frac{1}{2}$ との間にエネルギーギャップが生じ, 光子のエネルギーをあわせこむことにより $m=\pm\frac{1}{2}$ 状態からの遷移を抑制できることがわかる．原理的には 100% の偏極度が可能であり, 現実のビームにおいても 90% 前後の偏極度が得られている [34].

RF 電子銃の所でも述べたが, 実際には伝導帯に励起された電子がすべて真空中にでてきてビームとして取り出されるわけではない．多くの金属陰極などでは励起されたもののうちほんのわずかの電子が外にでてくるにすぎない．何故なら伝導帯の準位は真空よりも一般的に低く, 伝導帯から真空へ飛び出す確率はとても小さいからである．この確率を高めるために励起するレーザーのエネルギーを仕事関数よりも大きくとらなければならないことは既に述べた．しかしこの偏極電子銃ではレーザーのエネルギーをバンド幅 ($\sim$ 仕事関数) に限りなく近づけることで偏極を得ている．通常のバンド構造を有する陰極においては, 光のエネルギーを仕事関数に合せこんだ場合, 量子効率が小さくなり, 充分な量の電流を取り出すことが困難となる．

偏極 GaAs 陰極の表面は NEA(Negative Electron Affinity) という特殊な表面構造を形成しており, 伝導帯よりも真空の準位が低くなっているのである．そのため伝導帯に励起された電子の多くが真空中へとでてくることができるのである．この NEA 表面という性質は GaAs がもともと有しているものではなく, バルク GaAs 結晶に Cs と酸素を吸着させたある種の電気二重層がつくりだすものである．この NEA GaAs の量子効率は 10% 超と驚異的に高いものである．しかしこの NEA 表面はしかし取扱が非常に困難で充分な寿命を達成するためには電子銃内を超高真空にたもつ必要がある．

現在では既にのべた歪み GaAs 結晶の他に, Al や P をドープしたもの, 超格子構造など様々な GaAs 結晶がつくりだされ, その陰極としての性能が調べられている．

光電陰極物質の表面状態は, 物質中の伝導帯の準位と真空の準位との大小関係により正および負の電子親和度に大別される．負の電子親和度 (Negative Electron Affinity, NEA) は, 伝導帯の最低準位が真空の準位よりもエネルギーが高い状態である．それに対して正の電子親和度 (Positive Electron Affinity, PEA) は伝導帯の最低準位より真空準位のほうがエネルギーが高い状態のことである．

図 8.14 は NEA GaAs 陰極の電子準位と光電効果による電子放出の様子を表している．レーザーにより伝導帯に励起された電子は熱的にエネルギーを失いながら伝導帯のを伝搬していく．NEA 表面では伝導帯が真空よりも準位が高いので, これらの電子でも真空中へと放出され, 比較的高い量子効率が得られる．またほとんどの電子は伝導帯の底における疑似的熱平衡状態を経由してから真空中へと放出されるために, 余分な運動量をほとんど持たない．したがって熱運動量の小さい極小エミッタンスビームが得られる．

図 8.15 は NEA GaAs からの電子放出をモデル化した一例である。価電子帯から伝導帯に励起された電子は電子の励起波長できまるエネルギーを持つが, そのうち真空との界面方向成分である ε_z がを持って電子は界面へと向かう．

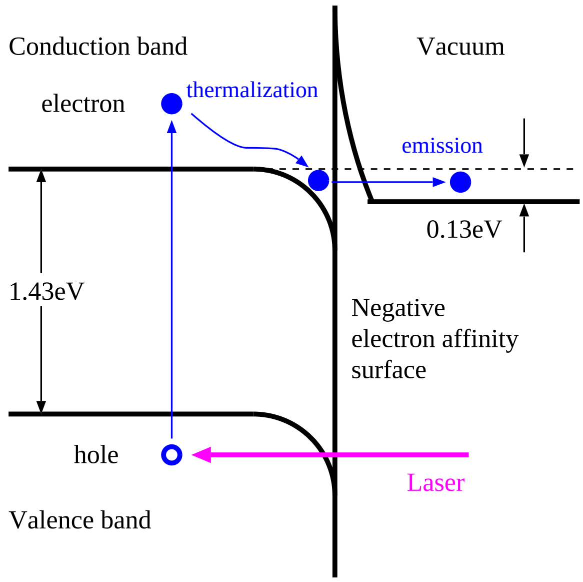


図 8.14 NEA GaAs 表面における光電効果による電子の励起と真空への放出の様子.

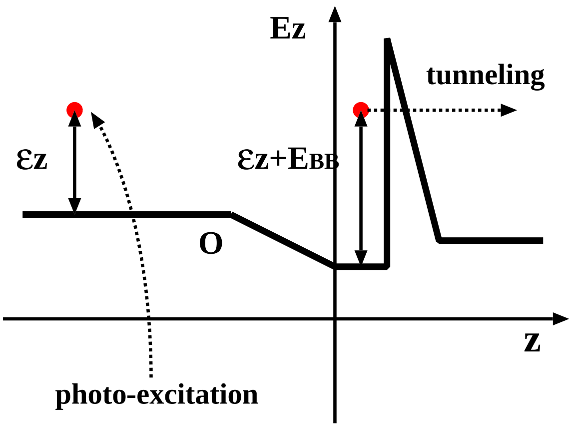


図 8.15 NEA GaAs 表面における真空への電子放出のモデル図.

NEA GaAs には一般に p 型の高濃度不純物ドーピングが施されており, 価電子帯の上に多くの不純物正孔準位が形成されている. そのため, 表面に存在する不対電子が拡散により半導体内部へと移動し, 表面にポテンシャル勾配を形成する. これをバンドベンディングと呼ぶ. バンドベンディングは界面の法線ベクトルに平行な方向に存在するポテンシャル勾配であるから, 電子はこの部分で z 方向に加速される. バンドベンディングの後での電子エネルギーは

$$E_z = E_{z0} + E_{BB}, \tag{8.135}$$

である. NEA 表面には図でしめされたように三角型のポテンシャル障壁が存在し, 電子はそこをトンネル効果により通過してくるものと考えられている. トンネル確率は WKB 近似を用いると式 (74) で表される. これを用いると NEA GaAs からの量子効率は以下の式で表される.

$$\eta(\hbar\omega) \propto \sqrt{\hbar\omega - E_{BG}} dE_{z0} T(E_z), \tag{8.136}$$

と表される. ここで dE_{z0} は物質中のエネルギー空間においての密度因子, $T(E_z)$ はトンネル確率である.

他方 PEA 表面では真空準位の方がエネルギーが高いために伝導帯の底にたまった電子は真空中にでることはできず, やがて価電子帯の正孔と再結合して消滅する. ビームとしてとりだせる電子は熱平衡に落ち着く前に確率的に真空

中へと放出されるものに限られ, それゆえに量子効率が低くなってしまう. また放出された電子はレーザー光子のエネルギーと真空準位との差に相当するエネルギーを運動量という形でもっており, 乱雑な運動をしている. 従って PEA 表面から得られる電子ビームの初期エミッタンスは比較的大きくなる. ほとんどの純金属, アルカリ金属は PEA 表面を有している.

半導体から光電効果により放出された電子の直交座標系における横方向エミッタンス ε_x は式 8.115 において $\chi = 0$ とすると

$$\varepsilon_x = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{2(\hbar\omega - E_{BG})}{3mc^2}\frac{\mu^*}{m_c^*}}, \tag{8.137}$$

と与えられる. ここで R はビーム径, $\hbar\omega$ は励起に使用される光子のエネルギー, E_{BG} は半導体のバンドギャップのエネルギー幅, k はボルツマン定数, T は陰極の温度, m は電子の質量, そして c は光速である. ここでは光子により励起された時に電子に与えられるエネルギーの寄与のみ考えており, 熱からの寄与は考慮されていない.

式 (8.137) を用いて比較のため典型的な金属カソードである銅を用いた場合に得られる電子ビームのエミッタンスを求めてみる. 銅の仕事関数は 4.30 eV, 使用するレーザーは紫外域の 266nm, 表面電場は RF 電子銃を仮定し 100 MV/m, ビーム径を 1 mm とすると, 得られるエミッタンスは 0.35 πmm.mrad 程度となる.

陰極に NEA GaAs を用いた場合, 電子は伝導帯における熱的緩和を経て放出されるために式 (8.137) は正確ではない. NEA GaAs から放出される電子の横方向エネルギーは S. Pastuszka[48] らによって実験的に測定されており, その値は 25 meV 程度である. この値を用いて陰極温度を 300K, ビーム径 1.0 mm として予想されるエミッタンスを求めると 0.13 $\pi mm.mrad$ となる. さらに陰極を液体窒素温度に冷却したとするとエミッタンスは 0.09 $\pi mm.mrad$ まで低下することになる. いずれにせよ NEA GaAs を陰極として使用することにより ERL 計画 [21] などの目標のひとつである 0.1 $\pi mm.mrad$ を下回る, あるいは極めて近いエミッタンスが得られるということである.

名古屋大学の山本尚人は GaAs-GaAsP 超格子陰極からえられたビームのエミッタンス計測を行い, 極めて電流密度の低い空間電荷効果が無視できる極限において 0.09πmm.mrad という結果を得た [49]. この結果は NEA GaAs 陰極が偏極電子源としてのみならず, 低エミッタンス陰極としても有望である, ということを示している. さらに, バルク（超格子でない）GaAs 陰極と GaAs-GaAsP 超格子の結果を比較し, エミッタンスの面からも超格子構造の有利さを指摘している. これは超格子により伝導帯に生成されるミニバンドが閉じ込め効果を発揮し, 大きな余剰エネルギーをもつ電子の励起をより抑制するからであると予測されている.

8.5　二次電子放出

二次電子放出とは, 電子あるいはその他の荷電粒子が物質に入射したさい, その表面から電子が放出される現象である.

加速器の電子源としては二次電子放出現象が使われることはめずらしい. 米国の BNL (Brookhaven National Laboratory, ブルックヘブン国立研究所) においては, イオンの電子冷却用の電子源として, ダイヤモンド陰極を開発中である [24]. ダイヤモンドは仕事関数が 5eV 程度と大きいことから, 光での励起を仮定すると真空紫外域という, 非常にレーザーでは作りにくい領域の光を必要とする. そこで低エネルギーの電子ビームを照射し, 二次電子放出機構によりダイヤモンドから電子ビームを得ようとしているが, まだ実用化はされていない. またマグネトロン中で二次電子放出を利用し, 電子源とする研究もウクライナで行われている [25].

原理的には電子が真空中へと脱出するのに充分なエネルギーを与えれば電子ビームが得られる. そのエネルギー源が熱であれば熱電子放出, 光であれば光電子放出, 電子であれば二次電子放出となる. レーザーでは他のレーザーを励起光として利用し, その性能を大きく向上させるという一つの流れがあるが, 電子銃においても同様の可能性がないとは言えない. また光電子増倍管では実用化されているが, エネルギーなどを選んでやれば二次電子放出においては入射電子に対してひとつ以上の放出電子が得られ, 電子ビームの電流増大機構として利用する方法も考えられる.

しかし一般的な加速器ではむしろ高周波加速空洞中での二次電子放出は放電現象のきっかけとなりあ, あまり歓迎

されない現象である．空洞内で共鳴的に生じる二次電子発生現象を Multi-pacting と呼び, 一つの電子により発生する二次電子の数が一を上回ると電子数が飛躍的に増大し, 電力消費の増大や, RF 場の破壊を生じる．したがって加速器科学においては Multi-pacting を生じる共鳴状態を起こさないような空洞の形状, あるいは表面処理, 材質などの点から研究が行われている．(文献 [26] 等を参照のこと．)

二次電子放出は

1. 一次電子の物質への入射
2. 一次電子の後方散乱
3. 物質内での二次電子の発生
4. その真空中への放出

などという過程を経て放出される．一次電子の入射に対して発生する二次電子数の割合を secondary yield といい, 一次電子のエネルギーの関数となる．Yield は一般的に 0.1keV 以下から 1 あるいは 2keV の領域で 1 を超える．この領域では一つの一次電子に対して一つ以上の二次電子が発生する．そのため, この過程が共鳴的に発生すると電子数が急激に増大し, 放電を発生する．

8.6 Laser

Laser は Light Amplification by Simulated Emission of Radiation の略であり, 今日では馴染深い発光デバイスとなっている．1960 年に C. H. Townes と A. L. Shawlow によって予測され, 1960 年に T. H. Maiman が, 1961 年に A. Javan らが各々ルビーレーザーとヘリウムネオンレーザーの発振に成功したのが最初である．その後様々な媒質による異なる波長領域でのレーザーが開発されてきている．

レーザーの基本構成は光共振器と媒質である．媒質は反転分布となっている必要がある．反転分布とはエネルギーの高い状態（B）の密度が低い状態（A）の密度よりも大きい状態をいう．この二つの状態間の遷移エネルギーに相当する光が外部より入射すると, 物質内部に分極を生じ, $A \to B$ あるいは $B \to A$ という遷移が生じる．各々の遷移は同じ確率で生じるので, どちらの遷移が支配的になるかは状態密度により決定される．通常はボルツマン分布によりほとんどの電子はエネルギーの低い A の状態にあり, $A \to B$ 遷移が支配的となる．この場合, 光は吸収され, 遷移のためのエネルギーとして消費される．反転分布の場合には逆の $B \to A$ 遷移が支配的となり, 光は吸収されず, 遷移のエネルギーが新たに光として放出されることになる．入射光と放出光の波長は等しいから, 入射した光子が遷移により二倍に増幅されることになる．この現象を誘導放出という．

光共振器の中で光は何回も往復し, 媒質を通るたびに誘導放出によりその強度を増加させてゆき, 発振状態となる．光共振器の共振条件を満す光のみがレーザー光として増幅されるので, 発振波長 λ は, 共振器長を L, モード番号を m とすると,

$$\lambda = \frac{2L}{m}, \tag{8.138}$$

という条件を満さなければならない．また光共振器内は共振モードに整合する光のみが蓄積されるから, そこから取り出された光は平行光（ガウスビーム）となる．つまりレーザーにより得られる光は自ずと特定の波長の平行性の高い光となる．光をレーザー光として利用するには光共振器から一部の光を外部に取り出す必要があるが, これは共振器にとっては損失となる．この損失と誘導放出による増加が釣りあった状態が飽和状態となる．

反転分布をつくるためには, 外部から光などの形でエネルギーを供給しなければならない．そのための操作をポンピングといい, その光をポンピング光という．ポンピング光にはランプなどからの光の他, 他のレーザーによる光などを使用する．

8.6.1 Laser 光の特徴

光電陰極において電子を発生させるさいには, 陰極物質の仕事関数, あるいはそれ以下の波長の光が必要となる. レーザーは発光デバイスの一つであるが, 次のような特性により, 光電陰極からの電子発生にまさにうってつけの特長を多く備えており, 現在では光電陰極型の電子銃には欠かざるべきものとなっている.

- 単色性
- 指向性
- 収束性
- 短パルス性

単色性とはレーザー光のスペクトルが非常に狭い幅をもっているということである. 一般的な光電陰極における励起には必ずしも単色性は必要ないが, 前述の偏極電子源における励起光には, 光のエネルギーによる選択的な励起が偏極を得るためには必要な特性である. またスペクトル幅が狭いことにより, 励起した光電子のエネルギー広がりが小さくなるため, 低エミッタンスビームの生成にも有利となる.

指向性とは光がひろがらずに, 直進するということである. これは光の輸送が決定的に容易となる. 通常, 電子銃自身は放射線の遮蔽のためシールド内に設置されるが, メンテナンス等を考慮し, レーザーはシールド外に置かれることが多い. 従って長い距離を輸送する必要があり, 指向性は重要な性能といえる.

収束性はレンズ等で収束させた場合, 回折限界まで絞り込めることを示している. 通常, あまり極端に小さいスポットから電子ビームを発生させることは様々な飽和現象を引き起こすために行わないが, それでも $1mm^2$ を下回るスポットに集光する場合もある. またレーザー光がほぼ理想的なガウスビームとして扱えることにより, よい収束性を示すことは, カソード上でのレーザースポットをかなり正確に予想できることになる.

最後の短パルス性は決定的な意味を有する. 例えば三極管構造の熱電子銃の時間構造はグリッドに印加する電気パルスの幅により決定され, 通常 1ns を下回ることは困難である. ビームの時間広がりを加速高周波の位相において 10 度以下にすることがエネルギーを均一に加速をおこなうひとつの目安となるが, 1.3GHz では 20ps 程度となり, 電子銃から得られたビームを集群する必要がある. レーザーではその種別や構成などにより CW（Continuous Wave, 連続波）から, 10ps(ピコ秒, $10^{-12}sec$) または 100fs(フェムト秒, $10^{-15}sec$) の短パルス光が得られるので, その光により電子発生を行うことにより, 直接短パルスの電子ビームを生成できるのである.

8.6.2 モード同期

単純に光共振器と媒質から構成されたレーザーから出てくる光は一般的に連続光, あるいは媒質の励起状態（反転分布）のが自然放出により消滅する時間（寿命）できまるパルス長を持つ. 短いパルス光は空洞の Q 値を抑制し, 反転分布が充分成長した時点で Q 値を急激に上昇させ, 発振状態を短い立ち上がり時間で実現する Q スイッチ法やモード同期法 (mode-lock) などで実現される. 特に後者の方法は発振バンド幅の広いレーザーと組合せることにより, 極めて短いパルス幅のレーザー光を, 速い繰り返し周期で得ることができるため, 加速器の応用上も極めて重要である.

式 8.138 で示されているようにレーザーは特定の波長においてのみ発振が可能であるが, モード数に従って異なる波長で発振させることができる. そこで角周波数にしてモード間隔 $\delta\omega$ の多数のモードを同時に発振させると, 周期 $2\pi/(\delta\omega)$ でビート波が発生する. この時, このビート波のパルス幅は全モード数を N とすると, $2\pi/(N\delta\omega)$ となる. すなわち多数のモードを同時に発振させることにより短いパルスのレーザー光を得ることが可能である. 例えば $N = 10^4$ あるいは 10^6 とすると, パルス幅として ps あるいは fs の極短パルスのレーザー光が得られる.

このようなモード同期は共振器内に誘電率を変化させるデバイスを挿入し, それを外部からドライブする方法や, 後述する Ti:Sapphire レーザーのように自己変調現象を利用することで実現される.

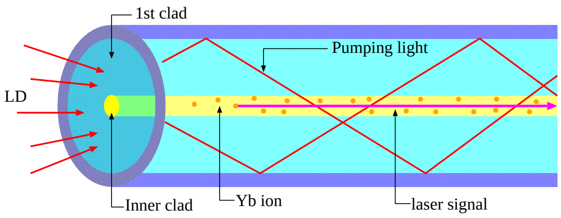


図 8.16 ファイバーレーザーの動作原理図.

8.6.3 代表的なレーザー

光電子発生に用いられるレーザーとして, 100fs 程度の非常に短いパルス発生が得られるものとしてチタンサファイアレーザー Ti : Al_2O_3 (Sapphire) がある. ポンピングには 488 nm 程度の光を使用するが, 多準位レーザーであり, 発振波長 は 700-1100nm と広いスペクトル領域をカバーしている. プリズムなどにより波長選択を行えば, 波長可変レーザーとして使用可能である. また広い発振波長領域を利用すれば, 極めて多数のモードによるモード同期が実現でき, 100fs 以下の極短パルス発生が可能である. さらに, このレーザーは自発的にモードロックを生ずることがしられている. 結晶中で生じる三次の非線形効果である光カー効果により, レーザーが自己収束することにより屈折率が強く変調され, 発振波長の変動が生じる. この効果により, 17fs の短パルス光が得られている [35].

Nd:YAG レーザー ($Nd^{3+}Y_3Al_5O_{12}$) は発振波長 1064 nm であり, 連続発振が可能なレーザーである. 典型的な四準位レーザーであり, 発振の生じる遷移である 1064 nm 線の自然放出による寿命は 5.5×10^{-4}s であり, 利得は低いがポンピングは容易で, 連続発光のランプなどにより励起することにより, 連続発振が可能となっている. また, 共振器内に屈折率が変化する変調器を挿入することにより, モードロックをかけて短パルス光を連続的に発生させることも可能である. 従って, 光電子の発生に直接用いられる他, 他のレーザーのポンピング光や, 後述する増幅における光源としても有用である.

近年はポンピングに従来のランプに代わり, LD(Laser Diode) を使用するものが増えている. これにより安定性や効率などの向上の他, 従来のランプによる励起が困難であった媒質もレーザーに使用できるようになっている. そのなかで特に注目されているものとして, Yb:YAG レーザーとファイバーレーザーをあげることができる.

Ti:Saphire レーザーの利点はすでに述べたが, 励起に 488nm の光が必要であり, LD からの光を直接利用できないため, Nd:YAG からのレーザー光の二倍波をもちいる必要があり, システムが高価となり, かつ効率が低いという問題がある. また蛍光寿命 3.2 μs と短く, CW あるいはマクロパルス生成が困難という問題がある.

これに対して Yb:YAG レーザーは発振波長が 1030 nm で, 励起に必要な光は 940 nm であり, 長寿命, 高出力, 高安定の In GaAs LD(Laser Diode) を使用でき, LD 励起の長所を取り込むことができる. また発振波長幅が 10nm 程度と Nd:YAG に比べて広く, モードロックをかけることにより 100fs 域の超短パルス動作が可能である. また蛍光寿命が 1ms 程度と長く, ILC のようなマクロパルス生成にも適しているといえる. Yb:YAG レーザーはこのように Nd:YAG レーザーと Ti:Sapphire レーザーの利点を兼ね備えたものとして注目されている. しかしまだ開発段階のレーザーであること, さらに ILC 電子源の光源として用いる場合, 波長可変性が要求されることも忘れてはならない. 逓倍波の発生は次項で述べるように確立された技術であるが, 連続可変技術は開発段階の技術である. しかしレーザー技術は日進月歩であり, 波長可変の目途がつけば, ILC 電子源用レーザーの有力候補となることは確実であろう.

ファイバーレーザーは光ファイバー通信の光増幅技術が発展したものである. この技術が確立される以前はファイバー内を進行する光の減衰長により光ファイバー通信の可能な距離に制限が存在したが, この技術の確立により, 光の減衰による制限は消滅し, コストの大幅な低減とともに, 光通信の爆発的な発展の原動力となった.

ファイバーレーザーは励起光源である LD, ダブルクラッドコア光ファイバーおよび共振器を構成するミラーなどからなる. 図 8.16 にダブルクラッドコアおよびファイバーレーザーの動作概念を示す. ダブルクラッドコア光ファ

イバーとは, 波長により異なる大きさのコアとして動作する光ファイバーであり, 励起光は径の大きな第一コア内を, レーザー光は内部コアを伝播する. 内部コアには励起物質 (Yb ファイバーレーザーにおいては Yb イオン) が添加されており, 励起光は第一コア内を伝播しつつ, 内部コアを通過するさいに Yb イオンを励起する. 自発光, あるいは外部からの光などで種光が内部コア内に発生すると, 内部コア内を伝播しながら誘導放出により徐々に増幅され, 最終的に発振状態へと至る. 光ファイバー内での励起光の伝播は極めて損失が低く, 励起光からレーザーへのエネルギー変換効率は一般的に極めて高い.

ファイバーレーザーの出力は近年に飛躍的な伸びを見せ, Yb ドープファイバーレーザーからの単一モード出力において, 2005 年の時点で 2kW を超える報告もある [36]. 今後もこの傾向は暫く続くものと思われる. 光電子発生にはそのような大パワーは必要ないが, 波長変換や安定性向上, 実質的な陰極寿命の向上などレーザーのパワー向上による利得は小さくない. 従ってファイバーレーザーをベースとして, 波長可変などの周辺技術の開発を並行してすすめることで, 現行システムの性能を大きく凌駕する可能性を秘めている.

8.6.4 非線形光学

レーザー光は物質中で分極を生じる. 通常は分極はレーザー強度（電場）に線形であるが, レーザーの強度が上がるに従って飽和し, その結果, 二次, あるいは三次以上の非線形成分を生ずる. 分極は量子化されることにより光となり, これら二次以上の非線形分極による様々な光学現象をあつかう光学を非線形光学という.

実用上最も重要な現象は高次モードの発生である. ある角周波数 ω_1 の光が結晶に入射し, そこで非線形分極が発生したとしよう. 二次の効果を考えると, 非線形分極により和周波数 $|\omega_1 + \omega_1|$ と差周波数 $|\omega_1 - \omega_1|$ の分極が発生する. この場合, 差周波数はゼロとなるが, 和周波数は $\omega_2 = 2\omega_1$ となり, この高次の分極から入射光の二倍の周波数の光が発生する. この現象を二次高調波発生（Second Harmonic Generation, SHG) という.

一般的にレーザーは Nd:YAG にみられるように, 赤外域で発振するものが多い. 他方, 光電子の励起には, 例えば金属陰極においては 300 nm 以下の紫外域の光が必要となる. 従って光電子の発生にはレーザー光の逓倍波を生成する必要があり, そのプロセスは根本的に重要である.

高調波の発生においては, エネルギー的な条件の他に, 運動量の保存に相当する位相整合条件を満すことが必要である. その条件を周波数と屈折率で表すと,

$$n_1\omega_1 + n_1\omega_1 = n_2\omega_2, \tag{8.139}$$

となる. ここで $n_{1,2}$ は各々の周波数に対する結晶の屈折率である. この式は光路にそって発生した分極から光が発生する際に, 異なる地点から発生した高調波の光が互いに打ち消しあうことなく, 位相がそろい同期するという条件に相当する. 一般的に等方的な結晶においては, 屈折率は正常分散という振舞いを示し, $\omega_1 < \omega_2$ の時には $n_1 < n_2$ と周波数とともに屈折率も大きくなるので, 位相整合条件を満すことは困難である.

そこで高調波発生には複屈折現象を用いて位相整合条件を満すようにする. 複屈折結晶とは, 偏光方向により異なる屈折率をもつ結晶で, その屈折率は結晶軸とレーザー光の角度の関数として変化する. 結晶軸の角度をうまく設定してやると, 異なる偏光状態の基本モードと高調波において, 正常分散による屈折率の周波数依存性と, 結晶軸からの角度依存性がちょうど打ち消しあい, 位相整合条件をみたすことが可能となる. そのような結晶内でレーザーを絞り込み, 非線形分極をおこさせることにより, 高調波を発生させることができる. 代表的な非等方性結晶として, KPD(Potassium Dihydrogen Phosphate, $\mathrm{KH_2PO_4}$), BBO(Beta-balium Borate, $\beta - \mathrm{BaB_20_4}$) などがある.

このような高調波発生において, 異なる波長の組み合わせでエネルギー条件および位相整合条件を作り出すことができれば, 異なる波長のレーザーの間でパワーをやり取りすることが可能である. このような現象の総称をパラメトリック光発生という. 式 8.139 の類推から

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = n_3\omega_3, \tag{8.140}$$

という条件が満されれば, 異なる三つの周波数の間でエネルギーのやり取りが可能となる.

例えば, 800 nm の Ti:Sapphire からの光をシグナルとして, 532 nm の Nd:YAG からの大パワーの光をドライバーとして同時に非線形結晶中に入射し, かつ位相条件を満すようにしてやると, Nd:YAG 光のパワーが減少し, Ti:Sapphire 光のパワーが増加するという現象が生じる. この現象を OPA(Optical Parametric Amplification) という. すなわち, Nd:YAG からの光がパワーソース (ω_3) となり, Ti:Sapphire からのシグナル光 (ω_1) が増幅されることになる. この時に派生する ω_2 の光をアイドラー（Idler, はずみ車）光という. これに, chirped-pulse amplification を同時におこなう技術が OPCPA(Optical Parametric Chirped-Pulse Amplification) である. Chirped-pulse amplification とは, 波長分散を利用してパルス長を伸ばした状態で増幅することで, ピークパワーを抑制し, より大きなパルスエネルギーを実現する技術である. 一般的な CPA ではパルスをチャープした後, ポンピングした結晶中を通過させて誘導放出により増幅する. OPCPA においては, パルス長を伸ばした後, 次に非線形結晶中に入射して OPA により増幅するのである. CPA ではポンピング光のパワーが結晶中のイオンを励起させ, そのイオンを媒介してレーザーシグナルへと転化するが, OPCPA では非線形分極を媒介として, 直接レーザーシグナル光へとパワーが移動する.

さらにこのパラメトリック光発生を用いて, 例えば Yb:YAG レーザーでは困難な波長可変性を実現することも可能である. まず SHG により二倍波に変換し, さらにこの光をパラメトリック光発生により二つの周波数へと分解するのである. そのさい, アイドラー光の周波数が可変とすることが可能であれば, 発生するシグナル光もそれに応じて波長可変となる. この技術は NOPA(Noncollinear Parametric Converter) と呼ばれ, パラメトリック光発生において広い波長領域で位相整合条件がみたすことが重要となり, 精力的な開発が続いている [37].

8.6.5 レーザーとビームエミッタンス

9.2.1 で議論するように, ビームのプロファイルとビームのエミッタンス=位相空間におけるビームの占める面積の間にはおおいに関係がある. 具体的には,

- 光電陰極からの光電子ビームのスポット径はレーザーの径により決定されるので, 発生時点でビームの有するエミッタンスはレーザー径に比例する.
- 光電子ビームの形状も 0 次近似においてレーザー密度に比例するので, レーザーの時間的, 空間的プロファイルが電子ビームのプロファイルを決定する.

という二つの効果によりエミッタンスはレーザーのプロファイルの影響を受ける. 最初のスポット径との関係は, 初期エミッタンスの空間依存部分について, レーザースポット径を制御することにより可変とすることができる, という操作性の問題である. 回折限界という下限は存在するが, 光電子発生の場合はそのような小さいスポット径からの電子発生は電流密度の上限から電流の絶対値をおおきく低下させることになり, あまり行われない.

二番目の電子ビームの空間・時間プロファイルはスケールを表すものではなく, 形や均一性などのより細かい形状のことを述べている. 形状によりビーム自身が自らに及ぼす空間電荷効果による発散力の非線形性成分の大きさが変化する. ビームにおけるエミッタンス増大の主要因は空間電荷効果の非線形性であるから, ビーム形状によりエミッタンス増大の度合が大きく変化するのである.

そのような非線形性を抑制するための形状として, 円筒型 (Cylinder), および葉巻型 (3D ellipsoidal)[38], [39] が各々提案されている. いずれの形状もビームを進行方向に垂直な面でスライスした形状は円であり, かつ電荷分布は円内で一定となっている. 違いは進行方向でのスライスした円の径であり, それが一定か, それとも楕円かの違いである. どちらがより良い分布であるかは議論の別れるところであるが, 筆者はビームが連続であれば円筒型, 非連続（バンチ化されている）場合は葉巻型であろうと思う.

いずれにしろ, ビームの形状を操作するにはレーザーの形状を操作する必要があるが, 標準的なレーザー光学から得られる横方向のレーザープロファイルはガウス型であり, 円形の均一分布を作ることでさえ容易ではない. また時間方向分布もモードロックレーザーではガウス型となり, 均一分布あるいは楕円分布を作ることも困難である.

時間方向の整形に関しては住友重工の酒井氏が回折格子と液晶フィルターによる均一化を, スプリング 8 の富澤氏は空間方向の均一化をデフォーマルミラーにより, 時間方向の均一化をパルス重畳により実現した. デフォーマルミラーとはミラーが薄膜でつくられており, 各部の圧力素子を操作することにより反射像を変形する素子であり, 富澤氏はプロファイルを指標として遺伝的アルゴリズムによる最適化で均一分布を得ることに成功している [40]. またパルス重畳とはレーザーをスプリッターで分割し, 分割された成分に異なる距離を伝播させ, ふたたび重ね合わせることで時間方向の分布を制御する技術である.

ERL などで要求されている超低エミッタンスビームを生成するには, すでにのべた初期エミッタンスのほか, 空間電荷効果によるエミッタンス増大をいかに抑制するかが課題である. その成否の鍵をレーザープロファイル整形技術に握っているのである.

第 9 章

電子の集団運動と電子銃

電子銃とは電子ビームを生成する装置のことである。電子銃は電子を生成するだけでなく、ビームとして引き出す機能をもつ．そこで電子を勢いよく特定の方向に打ち出すことから電子銃と呼ばれる. 電子銃ではどのような物質、すなわち陰極からどのような物理過程により電子を取り出すかとともに、どのような電場でビームとして引き出すかにより生成されるビームの性質が変化する。この章では空間における荷電粒子の振る舞いについての考察の後、電子銃の構成について述べる。

9.1　空間電荷制限電流

電子銃では陰極から電子が放出され, かけられている電場に従い陽極へと導かれ, 最終的に陽極孔からビームとして取り出される．熱電子銃などの擬連続ビームを発生する電子銃, すなわちビームが陰極から陽極まで移動するよりも長いバンチ長を発生させる電子銃においては, 個々の電子は常に動いているが, 次々と電子は陰極から発生しているために電子銃のある部分をみると常に同量の電子が空間内に存在している状態とみなせる．このような状態では後述するように引き出し電流はこの空間電荷の運動により決定される．この状態の空間電荷制限状態という.

電子銃内は陽極と陰極, さらに電場整形用の Wehnelt 電極などによりビームを導くための電場が形成されている. また電子が空間に存在することによって, 電子はその周りに電場を作る．従って電子銃内の電場は電極の作る電場と空間電荷のつくる電場の重ね合わせとなるのである．電子銃内の電場は空間電荷の存在によって変化する．どのように変化するのであろうか.

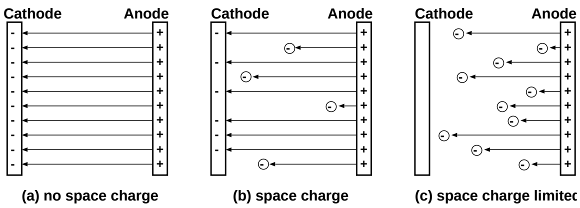


図 9.1　空間電荷による電場の低減の様子．(a) 空間電荷の存在しない場合陽極から出た電気力線は全て陰極へと到達し, 電場は至るところで一定である．(b) 空間電荷が存在すると, 電気力線の一部は電荷で終端され, 陰極へと到達せず陰極近傍の電場は低下する．(c) 空間電荷制限電流では全ての電気力線は空間電荷で終端し, 陰極へ到達せず, 陰極表面での電場は消失する.

今簡単のために陰極と陽極として平行平板の二極構造を仮定し, 陰極から陽極へと向かう方向に z 軸をとる．電場や空間電荷は z のみの関数とする.

空間電荷のない状態では z に関してももちろん電場は一定である．図 9.1(a) に示されているように, 陽極から出た電気力線はすべて陰極へと到達している．図 9.1(b) は陽極から出た電気力線の一部が空間電荷で終端される様子を表している．電気力線の密度が電場に相当するので, 空間電荷が存在することによって陰極近傍の電場は低下している.

陰極・陽極間の電位差を一定として空間電荷の量を増やしていくと図 9.1 (c) に示されているように, ついには全ての電気力線が空間電荷により終端されて, 陰極へ到達しなくなる. 陰極近傍は電気力線が存在しないので, 電場は消失している. この状態では陰極でいくら大量の電子が放出されてもビームとして取り出せないので, 空間電荷効果により陰極から取り出せるビーム電流には限界が存在することになる. この限界に相当する電流を空間電荷制限電流という.

定量的に空間電荷制限電流を評価するために既定の一次元モデルで考察してみよう. 空間電位 V と空間電荷密度 ρ は次のようにポワソンの方程式を満たす.

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -\frac{\rho(z)}{\epsilon_0}. \tag{9.1}$$

電流は電子の速度 v を用いて

$$J = -\rho v, \tag{9.2}$$

と表される. いま, 電流が一定の準静的状態を仮定しているため, 電流 J は一定である. 陰極から出た電子は初速度を有していないからエネルギー保存により

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV, \tag{9.3}$$

である. 式 (9.1) , (9.2) , そして (9.3) から v と ρ を消去すると

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{J}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{-\frac{1}{2}}, \tag{9.4}$$

を得る. 両辺に 2(dV/dz) をかけると

$$2\frac{dV}{dz}\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{2J}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{-\frac{1}{2}}\frac{dV}{dz}. \tag{9.5}$$

左辺は $\frac{d}{dz}\left(dV/dz \cdot dV/dz\right)$ に等しいため, 式 (9.5) を両辺 z で積分すると,

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = \frac{4J}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{\frac{1}{2}} + C_1, \tag{9.6}$$

となる. C_1 は積分定数であるが, $z = 0$, $V = 0$ で $dV/dz = 0$, すなわち陰極表面で電場はゼロと仮定すると $C_1 = 0$ となるため, 以降これを無視する. 式 (9.6) の二乗根をとり, 変形すると

$$V^{-\frac{1}{4}}\frac{dV}{dz} = \sqrt{\frac{4J}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}}, \tag{9.7}$$

を得る. 両辺を再び z について積分すると

$$\frac{4}{3}V^{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4J}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}}z, \tag{9.8}$$

となる. ここで陰極表面で $V = 0$ となるように積分定数を無視した. 式 (9.8) を J について解くと, 空間電荷制限電流が次のように求められる.

$$J = \frac{4\epsilon}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{V^{\frac{3}{2}}}{z^2}. \tag{9.9}$$

式 (9.9) は陰極に対する情報を何も含まない. すなわち陰極からの放出電流とは独立に式 (9.9) で表される電流の上限値が存在し, いくら優れた陰極を使用してもそれを越えることはできないという事実を表している.

両極間の距離 d, 陽極の電位 V_A(陰極は接地されているとする) を式 (9.9) に代入して得られる値は, その電子銃から得られる最大電流を表している. すなわち

$$J = 2.33 \times 10^{-6}\frac{V_A^{\frac{3}{2}}}{d^2}(A/m^2). \tag{9.10}$$

この式を二分の三乗則 (three-halves law) あるいはチャイルド・ラングミュアの法則 (Child-Langmuir law) という.

実際には電子は初速度を有して陰極から放出されるので, 陰極付近の電場がゼロになってもほとんどの電子は陽極に到達してしまい, 電流は依然として陰極からの放出によって決定される．そして空間電荷のさらなる増加によって陰極付近の電場が逆転し, そのポテンシャルの谷によって電流が制限されるようになって初めて空間電荷制限状態となる．

二分の三乗則における比例係数

$$P = \frac{J}{V_A^{\frac{3}{2}}}(A \cdot V^{-3/2}), \tag{9.11}$$

をパービアンスとよび, 電子銃の性質を表す量として用いる．パービアンスの高い電子銃は低い極間電圧で大きなビーム電流を得ることができる．

陰極面積を S とおくと, 平行ビームのパービアンスは式 (9.10) を変形し

$$P = 2.33 \times 10^{-6}\frac{S}{d^2}(A \cdot V^{-3/2}), \tag{9.12}$$

のように表される．つまりパービアンスは陰極面積に比例し, かつ陰極・陽極間隔の二乗に反比例する．

熱陰極からの電子放出をその発生源とする電子銃を熱電子銃という．熱電子銃では陰極で発生した電子を陰極・陽極間にかけられた静電場によりビームとして引き出す．この電場, すなわち陰極に対する陽極の電圧により得られるビーム電流は一般的に図 9.2 のような変化をみせる．

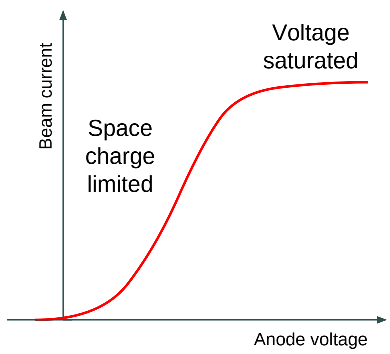


図 9.2　熱電子銃から得られるビーム電流の陽極電圧による変化．電場が低い領域では電流は空間電荷により制限され電圧の 3/2 乗に比例する．陽極電圧をさらに高めていくと電流は電圧にたいして飽和するようになる．陽極電圧がゼロでも微小な電流が流れるのは電子の初速度の効果である．

まず電場がゼロ付近では電子が有している初速度により陽極への到達電流が決定される．電子の初速度は陰極の温度により変化するので, この電流値は陰極の温度によって変化する．

徐々に電場をあげていくと電流が陰極からの放出ではなくビーム自身が作る電場, すなわち空間中に存在する電荷量によって制限される領域となる．この領域を空間電荷制限領域という．ここでは電流はほぼ電圧の 3/2 乗に比例し, 二分の三乗則 (three-halves law) が近似的に成り立つ．電流が陰極からの放出量ではなく空間電荷により制限されるので, 陰極の温度にたいして電流はほとんど変化しない．

さらに電場をあげていくと, 電場にたいして電流は飽和する．この領域を電圧飽和領域という．この領域では電流は再び陰極からの放出電流により制限されているために, 陰極の温度により電流も変化する．

熱電子銃は空間電荷制限領域で運転される．陰極からの電流は陰極の温度や陰極自身の劣化などにより変化するので, 長期にわたり一定に保つことは困難である．他方, 両極間の電圧を一定に保つことはたやすい．この領域においては得られる電流は陰極からの放出電流には依存せず, 両極間の電圧により決定されるので, 結果的に安定した電流が容易に得られるのである．また後述するように空間電荷制限状態では電子銃内の電場を整形してやることで電子の流れを制御することが可能であり, 平行ビームや収束ビームなどが得られるのも利点である．

ここでは一般的な熱電子銃を仮定したが, 熱電子銃でなくとも, 光電陰極型の電子銃などでもバンチ長が長い状態で動作させた場合, 同様の議論が成り立つ.

9.2 空間電荷効果とユニバーサル関数

電子銃から発生した電子は陽極孔からでて自由空間を進んでゆく. そのさいビームは自身のつくる電磁場 (半径方向の電場と円周方向の磁場) によって徐々に広がってゆく. 端部効果や非線型効果によりビームのエミッタンスも増大する.

問題を簡略化するために本稿では陽極孔からでてきた電子ビームは横方向運動量を持たないと仮定する. つまりパービアンスできまるサイズの平行な電子ビームを初期状態とする. さらにビームを円筒形の輪切りにして, その円筒とともに移動する座標系で考える. この座標系ではビームは静止している円筒形のかたまりとみなせる. ビームは軸方向に静止しているのでビームにはたらくのはクーロン力による半径方向の電場のみで磁場は存在しない. そうすると半径方向の運動方程式は

$$\frac{dp_r}{dt} = eE_r = \frac{e\rho}{2\epsilon_0} r, \tag{9.13}$$

のようにかける. ここで p_r は半径方向の運動量, E_r はクーロン力による半径方向の電場, ρ は電荷密度である. 円柱の長さを L とすると総電荷 Q は

$$Q = \pi r^2 L\rho, \tag{9.14}$$

と表される. 質量 m が時間的に変化しないと仮定すると

$$p_r = mdr/dt, \tag{9.15}$$

なので, これらを式 (9.13) に代入すると

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{2\epsilon_0 m}\frac{Q}{\pi L}\frac{1}{r}, \tag{9.16}$$

となる. $t = 0$ でのビーム半径を r_0 とおいて

$$R(t) = \frac{r}{r_0} \tag{9.17}$$

$$\tau(t) = \sqrt{\frac{eQ}{\epsilon_0 m\pi L}}\frac{t}{r_0}, \tag{9.18}$$

のように変数変換すると式 (9.16) は

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = \frac{1}{2R}, \tag{9.19}$$

となる. この方程式は

$$\tau(t) = \pm\int_1^R \frac{dR}{\sqrt{\log R + R_0'}}, \tag{9.20}$$

と解くことができる [41]. ここで R_0' は $R(t)$ の $t = 0$ における時間微分であるが, ビームの発生時 (陽極孔から出た時) の横方向運動量がゼロという仮定から $R_0' = 0$ となる. 従って

$$\begin{aligned}
\tau &= \int_1^R \frac{dR}{\sqrt{\log R}} \\
&= \int_0^{\log R} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx \\
&= \frac{e^x}{\sqrt{x}}\left(\sum_n (-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{1\cdot 3\ldots 2n-1}\right),
\end{aligned} \tag{9.21}$$

と展開することができる．ここで $x = \log R$ である．図 9.3 は数値的にもとめた $R - \tau$(点線) とそれを二次の多項式で最適化したもの (実線) を横軸に τ, 縦軸に R をとり表示したものである．このプロットから時間が経過するにつれてビームがひろがっていく様子がよくわかる．

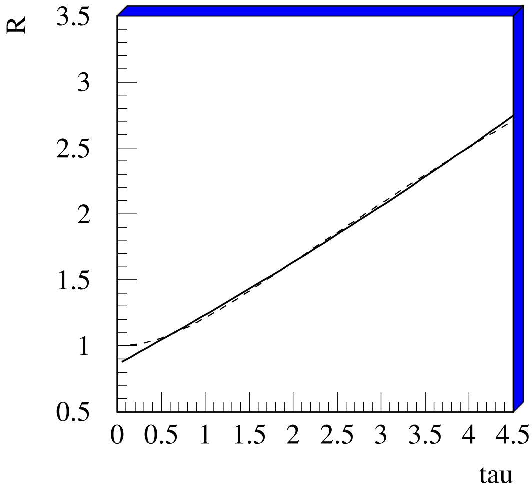


図 9.3　横軸は τ, 縦軸は R をあらわす．点線は式 (9.21) より数値的に求めたもの, 実線はそれを二次の多項式で最適化したもの．

ここで座標系を実験室系へと移し, 実際のビームサイズの変化がどのようになるのか見てみよう．静止系を (r, z, t), 実験室系を (r', z', t') とし, ビームの速度を v_0 とするとローレンツ変換より各変数は

$$r' = r \tag{9.22}$$
$$z' = \gamma(z + v_0 t) \tag{9.23}$$

という関係にある．静止系では常に $z = 0$ なので, それを代入すると

$$t = \frac{z'}{\gamma v_0} = \frac{t'}{\gamma} \tag{9.24}$$

となる．すなわち静止系の時間は実験室系の時間にくらべて $1/\gamma$ だけ遅く進むのである．

静止系の長さ L の円筒は実験室系でみると L/γ である．いっぽう電荷 Q は両者で保存されるので

$$Q = I\frac{L}{\gamma v_0}, \tag{9.25}$$

となる．式 (9.24),(9.25) を式 (9.18) に代入すると,

$$\tau = \sqrt{\frac{e}{\epsilon_0 m_0}\frac{I}{\pi\gamma v_0^3}\frac{z'}{\gamma r_0}}, \tag{9.26}$$

を得る．ここで $m = m_0\gamma$ とした．

ここまでの議論でわかることは, ビームサイズは空間電荷効果により式 (9.21) のように変化する, ということである．そしてこの式は座標系によらず常に成立する．したがってこの式 (9.21) をユニバーサル関数と呼ぶ．座標系の変換は式 9.26 による変数 τ と実時間 t あるいは座標 z' との関係によって記述される．

9.2.1　空間電荷効果によるエミッタンス増大

ユニバーサル関数によって空間電荷効果によるビームサイズの増大が生じることがわかった．その時エミッタンスはどうなるのであろうか．空間電荷効果が存在するとエミッタンスが増大する, ということがよく言われるが, そのことを正しく理解しないと大きな誤解を生じることになる．

最初に結論をいうが, 前節のように密度一定の連続ビームを考察している限り, 空間電荷効果によりエミッタンスの増大は生じない. つまりエミッタンスは保存するという Liouville の定理は厳密に成り立っている. 物理的にいえば, 空間電荷効果による発散力が線形であれば, エミッタンスは増大しない. しかし現実においては空間電荷効果によるエミッタンスの増大はおおくの場合に観測され, その克服は低エミッタンスビームの生成においては大きな課題である. その理由は空間電荷効果が多くの場合非線型の成分を有するからである. また実際のエミッタンスは増大していなくても, エミッタンスの実際的な定義であるプロジェクトエミッタンスが増大して見えるというのも理由だろう. 我々が測定するほとんどの場合はプロジェクトエミッタンスを測定しているのである.

まず最初に理想的な状態のビームの位相空間における運動を理解し, 次に重要な概念となるスライスエミッタンスとプロジェクトエミッタンスについて説明しよう. 以下, 特に断らない限り, x 方向の運動を仮定する.

9.3　線形空間電荷効果

初期状態として, ビームサイズが $\pm x_0$, 運動量 x' がゼロの状態を仮定する. このビームをドリフトさせた場合, 全ての粒子は横方向運動量を持っていないから, 空間電荷効果がなければ位相空間分布を保持したままであり, エミッタンス増大は生じない.

次に空間電荷効果がある場合を考えよう. この場合, 運動量 x' はドリフトに従って

$$x' = f(z,x)z, \tag{9.27}$$

のように変化する. $f(z,x)$ はは空間電荷効果を表す関数である. 空間電荷効果が線形な場合, $f(z,x) = f_0 x$ と書けるから, 式 (9.27) は

$$x' = f_0 x z, \tag{9.28}$$

と表されることになる. ここで空間電荷効果の z による変化を無視している. これはドリフト距離が短く, 運動量の変化が実空間の変化を引き起こしたとしても, 空間電荷効果に大きな変化を生じないとの仮定である. この式は位相空間分布が直線を保ったままドリフトに従って序々に左側に傾いていくことを表している. 図 9.4 にその運動の様子を示す. 初期状態として運動量を持たない AA 分布を仮定している. 線形空間電荷効果により, AA 分布は BB 分布に移動する. 運動量が空間電荷効果により発生すると, それに従い実空間においても移動が生じる. その大きさは運動量に比例するから, ちょうど位相空間分布でみると横方向に引き延ばされるように移動する. この左への傾きと横方向への引き延ばしが同時に生じるのである. 図 9.4 でみると, AA から BB, そして CC へと分布が変遷していく.

この仮定を通じて運動量方向および実空間方向において位相空間分布は拡大しているが, 以前として分布は直線のままである. 従ってエミッタンス増大は起っていない.

後のために, このビームをソレノイド磁場に通してみよう. ソレノイド磁場においては座標（ここでは x）に比例した収束力を得るから, その強さにもよるが, 例えば図 9.4 において CC から DD への移動を生じる. 依然としてエミッタンス増加は生じない. 分布 DD においては BB とは逆にビームは収縮するように運動する. また依然として空間電荷効果は働いているので, 左に傾くように運動する. したがって収束の強さを適当なる値に調節すると, DD 分布は最初の AA 分布に戻すことができる. これはエミッタンスが増大していないことのからは当然の帰結であり, その傍証でもある.

空間電荷効果が線形とは, 電荷分布が一定の場合に相当する. ビーム中心から半径にして a まで一定の電荷密度 ρ で分布しているとしよう. 電場が軸方向二存在せず, 動径方向のみ存在するとすると, ガウスの法則によりその電場は

$$E_r = 4\pi \frac{\rho \pi r^2}{2\pi r} = 2\pi \rho r, \tag{9.29}$$

となり, r に比例する. これを直交座標系でみると, たとえば x 軸から角度 θ を定義すると,

$$E_x = E_r \cos\theta = E_r \frac{x}{r} = 2\pi \rho x, \tag{9.30}$$

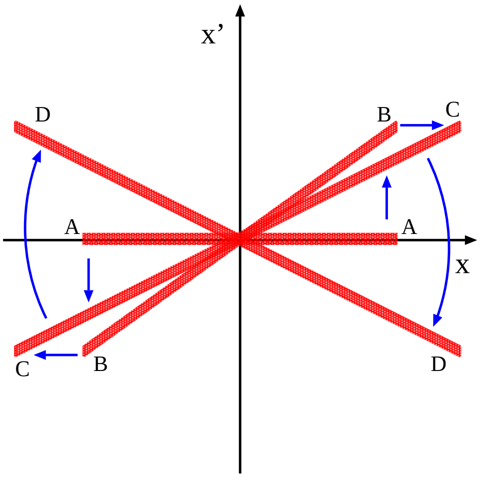


図 9.4　線形な空間電荷効果がある場合の位相空間におけるビームの運動．初期状態として AA, すなわち運動量ゼロの状態を仮定している．

となって, やはり座標に対して線形となる．

ここまでの議論をまとめると, 以下のようになる．空間電荷効果が線形の場合, エミッタンス増加は生じない．空間電荷効果が線形の場合とは, 電荷分布が軸対称で, かつ密度が一定の場合である．

非線型空間電荷効果

それでは空間電荷効果が非線型の場合はどうであろうか．同様にドリフトによる運動量の変化はトに従って

$$x' = f(x)z, \tag{9.31}$$

のように変化する．z による依存性を無視したのは線形の場合と同様であるが, より一般的に $f(x)$ は空間電荷効果を表す x の関数である．このような力を受けて運動をするビームは位相空間において歪みをうけながら左側に傾く．歪みは非線型からくるもので, 非線型が大きいほど, その歪みも大きくなる．例えば径方向にビームの電荷密度がガウス分布しているとしよう．この仮定は現実的なもので, 中心極限定理によりある軌道中心のまわりに確率的運動を行うビームは必ずガウス分布へと収束する．ガウス分布するビームの動径方向の空間電荷力による発散力は中心部で大きく, 周囲にゆくと急激に減少する．この分布を仮定すると, ドリフトにより位相空間分布はちょうど S 字を描きながら左に傾いていく．

エミッタンスを位相空間でしめる粒子の面積と定義すれば, このような変化が生じたとしても, 依然として分布は面積をもっておらず, 増大は生じていないといえる．しかしこの変化により二変数間の相関は減少しており, RMS で定義されるエミッタンスは増大している．RMS エミッタンスは

$$\varepsilon_x = \pi\sqrt{\bar{x}^2 \times \bar{x'}^2 - (\overline{xx'})^2}, \tag{9.32}$$

とあらわされる．さて実際のところ, RMS エミッタンスの増大はビームの品質として問題であろうか．例えば電子ビームによって放射光を発生させる場合, エミッタンスが小さいほど輝度が上昇することが知られている．それはビームに含まれる電子各々が放射する放射場が小さくまとまっていればいるほどよく干渉し, 放射パワーが上昇するからに他ならない．その際, 面積が仮にゼロであっても, 歪んだ分布をしている場合, 各電子からの放射はエミッタンスが広がっている場合と同様に「ぼやけた」ものとなってしまう．したがって面積としてのエミッタンスよりも, RMS エミッタンスのほうをビーム品質の尺度としてもちいるべきであり, 非線形空間電荷効果により RMS エミッタンス増大はまさにビーム品質の悪化といえる．

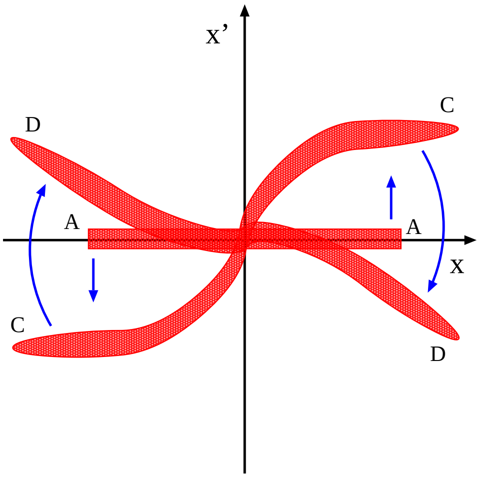


図 9.5　非線形な空間電荷効果がある場合の位相空間におけるビームの運動．初期状態として AA, すなわち運動量ゼロの状態を仮定している．

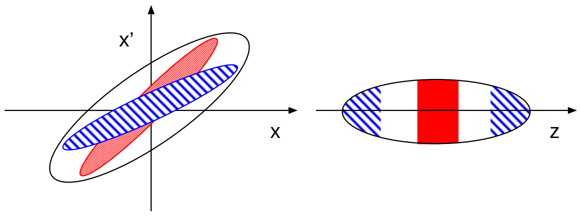


図 9.6　異なる輪切りエミッタンスの運動の例．中央部分の輪切りは空間電荷効果が大きいので, 位相空間での傾きが大きくなる．端部の輪切りはそれにくらべ傾きが小さく, 投影エミッタンスは (a) のように輪切りの不一致により増大する．

9.3.1　輪切りエミッタンスと投影エミッタンス

さて今までの議論は進行方向にたいして一様な系を仮定していた．実際にはビームは進行方向に分布をもっている．そこでビームの進行方向に垂直な面でビームを幾つかの部分に輪切り（スライス）にし, 各輪切りに対してエミッタンスを定義する．これを輪切り（スライス）エミッタンスという．これに対して, 全てのスライスを進行方向に垂直な面に投影した位相空間分布で定義されるエミッタンスを投影（プロジェクト）エミッタンスと定義しよう．

図 9.6 に両エミッタンスの概念図を示している．ここではバンチの先頭, 中央部, そして後尾について輪切りエミッタンスを示している．この輪切りを含むビーム全体を投影して得られるのが投影エミッタンスである．

ここでビームの進行方向の電荷密度分布として, 中央部が大きく, 端部が小さいと仮定しよう．これは通常のビーム分布として最もなものである．たとえばモードロックレーザーからの短パルス光はパワーの時間依存性はガウス分布となることがしられている．このレーザー光による光電効果でビームを生成した場合に, その分布はやはり中央部で大きく, 端部で小さくなるであろう．このような状態で, 各スライスの位相空間における運動を考えよう．

各輪切りにおける横方向の電荷分布が一定の場合, 空間電荷効果は線形となり, エミッタンス増大は生じない．他方, 分布が一定でなければ空間電荷効果は非線型となり, エミッタンス増大が生じる．

しかし仮に輪切りエミッタンスが増大しない場合でも, 図 9.6 に示されているように, 各輪切りの傾きが異なる場合, これを同一の位相空間に投影すると, エミッタンスは増大して見える．つまり輪切りエミッタンスは増大していないが, その分布が輪切り毎に異なるために, 全てを投影エミッタンスで見ると増大しているのである．

この過程をプロジェクトエミッタンスでみてみる．各スライスは発散力に従って同様の動きをおこなうが, 密度が

異れば発散力は異なり, 各スライスの動きも当然異る. したがってプロジェクトエミッタンスは増大する.

ここで整理すると以下のようになる.

- 各輪切りで横方向の電荷分布が一定の場合, 輪切りエミッタンスは不変である.
- 各輪切りで電荷密度に差がある場合, プロジェクトエミッタンスは増大する.

さて, ここでプロジェクトエミッタンスの増大がビーム品質の悪化であるかどうかが問題である. この問題を一般的に考察する力量は筆者にはないが, 一般論として言えることは, 各輪切りがビームとして独立に作用する場合は輪切りエミッタンスがビーム品質として重要であり, バンチが一体として作用する場合にはプロジェクトエミッタンスが重要であるということである.

例えば, ILC のようなコライダーの場合, 各輪切りは異なる輪切りと交錯することで衝突現象が生じるから, 各輪切りが小さくまとまっていることとともに, 各輪切りがバラバラでないことが重要である. すなわち投影エミッタンスが有効な指標であろう.

それに対して, FEL の場合は, 各輪切りがセルフバンチングを生じ, 各マイクロバンチからの放射が自発的に生じるとともに, それが干渉して発振状態が発生するのであるから, ビームのごく限られた領域, すなわち輪切りのまとまり=輪切りエミッタンスが重要な指標であろう.

俗にいう「エミッタンス補正」なるものは, なんらかの方法により各スライス間の位相空間分布の不一致を解消し, 合せこむ作業に他ならない. 従ってエミッタンス補正を考えた場合, つぎのような結論にいたる.

- スライス間の不一致によるプロジェクトエミッタンスの増大はなんらかの方法により補正できる可能性がある.
- スライスエミッタンスを減少させることは原理的に不可能である.

エミッタンス補正には多くの場合ソレノイド磁場が用いられる. ソレノイド磁場は端部磁場の効果により, 中心軸からの距離に比例した収束力を発生させる. すなわち空間電荷効果とはちょうど逆の運動量変化をもたらす. スライスによる不一致があった場合でも, 大きく傾いたスライスは大きな収束を, 小さく傾いたスライスは小さい収束をうけるので, ソレノイド磁場の強さを調製することにより, ずれてしまった各スライスをふたたびうまく重ね合わせることができる. このことにより, 増大してしまった投影エミッタンスを復元することができる.

この方法は, 非線型空間電荷効果によるスライスエミッタンスの補正には有効ではない. 非線型空間電荷効果による輪切りおよび投影エミッタンスの増大は補正不可能である.

9.4 Pierce 型熱電子銃

9.4.1 空間電荷平行流

空間電荷制限領域では得られるビーム電流はパービアンスに比例する. パービアンスは電子銃の形状に固有の定数であるので, パービアンスの大きい銃を設計できれば低い電圧で大電流を取り出せるので電子銃として望ましい.

1939 年に Wehnelt と Pierce は 空間電荷制限電流領域の熱電子銃において, 高いパービアンスを実現するための電子銃の設計法を考案した. その原理に基づく電子銃を Pierce 型熱電子銃といい, 加速器の電子源として広く用いられている.

Pierce 型熱電子銃の設計法は簡略化すると次のようになる. 以下平行ビームを仮定して電子銃内の電場分布を得る方法の概略を述べる.

1. 電流は層流をなしており, 電流の存在するところでは電位は Poisson の方程式を満たしている.
2. 電流の存在しない空間では 電位は Laplace の方程式を満たす.
3. 電流の境界面では電流に垂直な電場成分は存在しない. 何故ならそれが存在すると電流は平行とならないからである.

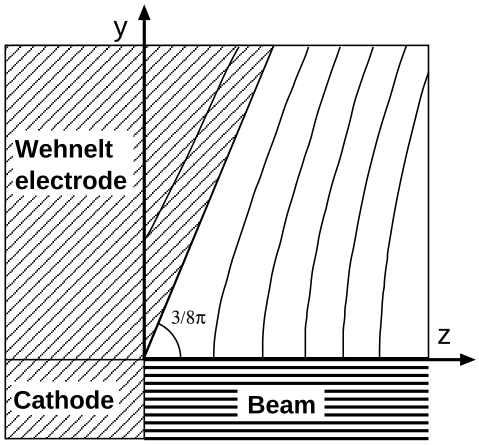


図 9.7 Pierce 型熱電子銃内の電場の様子．縦軸に y, 横軸に z をとる．y < 0, z = 0 が陰極面となっており，z+ 方向に平行に電子が流れだしている．平行電子流をつくるための電場の等電位線がいくつか描かれている．V = 0(陰極と等電位) の等電位線はビームに対して $3/8\pi$ だけ傾いた直線をなしており，それにそって電極を設けることで所定の電場分布を実現する．

図 9.7 に層流を仮定した電子銃の様子を表す．ビームは z=0 にあるカソードから放出されており z 軸のプラス方向に流れ出しているとする．y=0 がビームの端部をなしていると仮定する．すなわち $y < 0$, $z > 0$ の空間は空間電荷でみたされている．$y < 0$, $z < 0$ にはカソードがあり，$y > 0$ は自由空間となっている．

ここで電流として完全平行な層流を仮定すると，層流中の電位分布は式 (9.9) を (9.10) で割ることによりえられる．その結果は

$$V = V_A \left(\frac{z}{d}\right)^{\frac{4}{3}}, \tag{9.33}$$

となる．$z = 0$ で $V = 0$, すなわちカソード面で電位ゼロであり，$z = d$ のアノードで $V = V_A$ となる．この式はもともと Poisson の方程式を仮定して求められたものであり，条件 (1) は自動的に満たしている．

$y = 0$ では電場が y 方向の成分をもたないため，電位は z のみの関数となる．すなわち

$$V = \phi(z). \tag{9.34}$$

式 (9.33) はすでにこの条件をみたしている．

$y > 0$ においては電位は Laplace の方程式を満たさねばならない．すなわち

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \tag{9.35}$$

式 (9.33) は $y \leq 0$ における条件を満たしているので，式 (9.35) の解のうちで，$y = 0$ で式 (9.33) と一致するものが求める解となる．それは次のように与えられる．

$$\begin{aligned} V &= \frac{V_A}{d^{\frac{4}{3}}} \Re(z + \jmath y)^{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{V_A}{d^{\frac{4}{3}}} (z^2 + y^2)^{\frac{2}{3}} \cos \frac{4}{3}\theta, \end{aligned} \tag{9.36}$$

ここで θ は

$$\theta = \arctan \frac{y}{z}, \tag{9.37}$$

である．式 (9.36) において $V = 0$ とおくと，$\cos \frac{4}{3}\theta = 0$, すなわち $\theta = \frac{3}{8}\pi$ となり，$V = 0$ の等電位線は原点を通り z 軸に対して $\frac{3}{8}\pi$ の角をなした直線で表される．図 9.7 にはそれを含めていくつかの等電位線が描いてある．

このような電位分布を実現するために図 9.7 に示されているように通常 $V = 0$ の電位に電場整形用の電極を設置する．この電極を初案者のひとりである Wehnelt に因み Wehnelt 電極という．カソードの大きさは任意にとれるので，カソードの面積に応じて任意のパービアンスの電子銃をつくることができる．

ここで考えたのは平行電流を発生する二次元モデルであるが，三次元でのいくつかの形状について平行ビーム，そして収束ビームを発生する Pierce 型電子銃が提示されている．現代では解析的方法にかわり，コンピューターシミュレーションにより電子銃を設計するのが一般的になっている．

9.5　RF 電子銃

1980 年台半ばに，定在波型 RF 空洞内壁で電子を直接発生させる RF 電子銃が米国 Los Alamos の Fraser と Sheffield によって提唱・製作された．

現在では RF 電子銃は熱電子放出を用いる RF 熱電子銃と，レーザーによる光電効果をタンスは用いる光電陰極型 RF 電子銃とにわかれる．本稿では将来的にさらに高性能をねらえると思われている光電陰極型 RF 電子銃を中心に話をすすめていく．

RF 電子銃において陰極表面で発生した電子は空洞内の RF 加速電場によりただちに数 MeV という相対論的運動量まで加速される．熱電子銃のように加速までの低エネルギー状態でのドリフトが必要ないので空間電荷効果によるエミッタンスの増大が抑制され低エミッタンスのビームが得られるのが利点である．

また電子ビームの時間構造はレーザーの時間構造を反映するため，簡単に短いパルス長のビームを得ることができる．それにより従来の熱電子銃を用いた入射器で必要であったビームの集群のための空洞などを省くことができ，システムの簡略化，安定性の向上などが見込める．

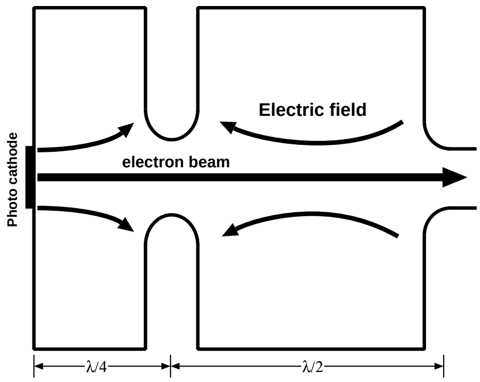


図 9.8　RF 電子銃．定在波型 RF 共鳴空洞の壁面に陰極をとりつけた構造となっている．実際は無酸素銅など空洞の構造材そのものを陰極としてもちいることも多い．

図 9.8 は RF 電子銃の動作原理を表したものである．RF 電子銃は通常となりあうセルに立つ共振モードの位相差が π (180 度) の定在波型共鳴空洞が用いられる．π モードを加速に用いることで電子ビームと RF の位相同期をとり，複数セルによる効率的な加速を行う．

最初の陰極を含むセルは $\lambda/4$ 長とし，陰極を含む空洞端面を電気的短絡面としている．これにより陰極表面に強い電場が誘起され，発生した電子が空間電荷効果により膨張しないうちに相対論的エネルギーまで加速される．

9.5.1　縦方向のダイナミクス

ここでは空洞中心軸上における電子の加速の様子について検討する。中心軸を z 軸にとりカソード表面を $z = 0$、ビーム進行方向を $+z$ とする。軸上の RF による電場成分 E_z を

$$E_z = E_0 \cos kz \sin(\omega t + \phi_0), \tag{9.38}$$

のように仮定する。ここで E_0 は加速電場の最大値、$k = 2\pi/\lambda$ で λ は RF の管内波長、$\omega = ck$ で c は光速、ϕ_0 はビーム発生時である $t = 0$ での RF 位相である。位置 z にある電子に同期する位相 ϕ は次のように表される。

$$\begin{aligned}\phi &= \omega t - kz + \phi_0 \\ &= k \int_0^z \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - 1 \right) dz + \phi_0.\end{aligned} \tag{9.39}$$

γ は相対論における γ である。$\gamma/\sqrt{\gamma^2 - 1} = 1/\beta$ は電子の光 (=RF 位相) に対するずれを表したものである。また電子の加速は位相 ϕ を用いて次のように表される。

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{eE_0}{2mc^2}[\sin\phi + \sin(\phi + 2kz)]. \tag{9.40}$$

右辺の括弧内の第一項と第二項は各々 z 軸の正方向と負方向へと伝播する成分による寄与を表す。

陰極近傍では $z << 1$ なので式 (9.40) における kz 項の寄与は限定的となる。そこで $\phi \sim \phi + 2kz \sim \phi_0$ と仮定すると式 (9.40) は

$$\frac{d\gamma}{dz} \sim \frac{eE_0}{mc^2} \sin\phi_0, \tag{9.41}$$

と近似できる。これより γ は

$$\tilde{\gamma} = 1 + 2\alpha \sin(\phi_0) kz, \tag{9.42}$$

と書ける。$\tilde{\gamma}$ としているのはカソード近傍のみで成り立つ近似解であることを示すためである。ここで

$$\alpha = \frac{eE_0}{2mc^2 k}, \tag{9.43}$$

である。

近似解である式 (9.42) を式 (9.39) に代入すると積分が容易に実行されて次式のようになる。

$$\phi = \frac{1}{2\alpha \sin\phi_0} \left[\sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1} - (\tilde{\gamma} - 1) \right] + \phi_0. \tag{9.44}$$

式 (9.39) の z による被積分関数は $\gamma \sim 1$ 付近において大きな値を示し γ が大きくなるにつれて急激に減少する。γ が 1 に近いということは電子のエネルギーが小さい、すなわち陰極近傍ということになり、陰極近傍で有効な近似式 (9.39) を使用して求めた式 (9.44) は陰極付近のみならずより広い範囲で良い近似となっている。

式 (9.40) を z について積分して、式 (9.44) から得られる ϕ を代入すれば γ が求められる。先述したように ϕ は陰極付近でのみ z について変化を示すが、そのほかの領域ではほぼ定数として扱ってよい。したがって ϕ を定数として扱い式 (9.40) を積分してやると次式を得る。

$$\gamma = 1 + \alpha \left[kz \sin\phi + \frac{1}{2}(\cos\phi - \cos(\phi + 2kz)) \right]. \tag{9.45}$$

この近似解は γ について正確な解と非常によい一致を示す [42]。

図 9.9 は式 (9.45) より求めた γ を z/λ、すなわち距離を共振 RF の管内波長で規格化したものの関数として表したものである。0.25 付近が陰極を含む第一セルと第二セルの境界、0.75 付近が第二セルの終端に相当する。おのおのセルの境界付近で加速勾配が低くなっている様子が表されている。

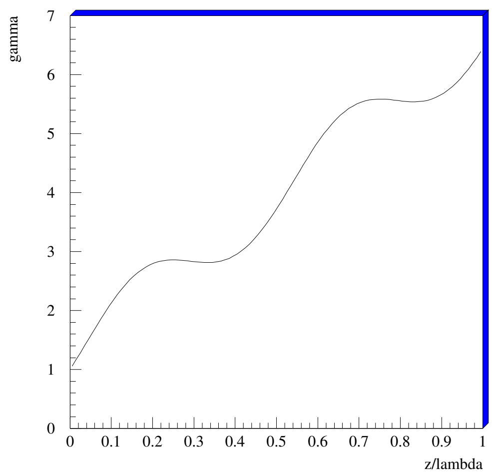


図 9.9　式 (9.43) より求めた γ を距離の関数として表示したもの。距離は RF の管内波長で規格化してある。

表 9.1　ILC の入射器に要求されるパラメーター．標準パラメーター

項目	数値	単位
バンチ電荷	3.2 (1.6)	nC
バンチ長 (in σ)	4.3	ps
規格化エミッタンス	10	μ.rad
バンチ間隔	308 (154)	ns
バンチ数	2800 (5600)	バンチ
マクロパルス長さ	0.9	ms
偏極度	80	%

9.6　ILC 入射器

ILC は超伝導加速器をベースとするシステムであるから, 最大の境界条件として超伝導加速器で加速可能なビーム構造であることが必要である．種々の理由から超伝導加速器ではビームの平均電流を低く抑え, かつ一つの RF パルスで加速されるバンチ数をなるべく多くするのが効率的となる．現在の基本設計ではビームパラメーターは以下のようになっている．ILC の基本設計において, パラメーター空間アプローチというものが採用されている．これは従来の加速器設計における単独パラメーターアプローチの欠点を補うものとして考案された．単独パラメーターアプローチでは各々のコンポーネントについて単独のパラメーターを設定し, その単独パラメーターが全てのコンポーネントについて達成された場合に設計性能（多くの場合は最高性能）が得られることを期待し, 概念設計を最適化するものである．しかし実際の加速器建設において, 全てのコンポーネントが要求性能を満すということは稀であり, 設計とは異なる条件で運転しつつ性能向上を徐々にすすめる, ということが普通である．パラメーター空間アプローチとはこのような加速器設計と建設, 運転調整の実際に則して, 最高性能への到達に最適化した設計思想のことである．

単独パラメーターの問題点は, 極端な最適化を行うあまりに最高性能は高いが何らかの理由でその動作点に到達出来無い場合に得られる性能が極端に低下する場合が多い, ということである．最適化の度合が高ければ高いほどこのような特性は顕著となる．実際には設計された動作点で運転が実現されるというのは稀なケースであるから, ほとんどの場合は設計動作点以外の場所, すなわち設計よりも低い性能で運転されることになるのである．従って単独パラメーターアプローチでは, 結果として加速器の最高性能を発揮できないばかりか, それを大きく下回るという可能性が

極めて大きくなる．

パラメーター空間アプローチとは, 主要パラメーターに幅をもたせることでこの問題を克服することをめざしたものである．このアプローチでは主要パラメーターが変化しても性能（コライダーの場合は輝度, ルミノシティー）があまり変化しないような領域を選び, 各々のコンポーネントはそれらの幅をもったパラメーターを実現できるような柔軟性を持つことを目指して設計される．この場合, 理想的な状態で実現されうる最高性能は単独パラメーターアプローチよりも低くなるのは必定であるが, 何らかの問題でパラメーターが多少移動しようとも, ルミノシティーの減少幅は小さなものにとどまるだろう．従って理想的な最高性能は抑制的となるが, その性能は高い確立で実際に達成されるだろうことが期待される．

電子ビームの偏極度 80% 以上という設定は物理実験からの強い要請によるものである．現在のところ実用化されている偏極電子源は NEA GaAs を陰極のみであるから, この要求により他の陰極の選択の余地はないといってよい．逆にいえば, この NEA GaAs 陰極が存在することにより, このような偏極度が基本設計に盛り込まれているといっていいだろう．

以上のような理由から, ILC 電子銃は NEA GaAs 陰極の使用を前提として, 表 (9.1) のような仕様を満すものとして概念設計が進められた．

9.6.1　ILC 電子銃

ILC 電子銃は基本パラメーターについて説明したように, 偏極電子発生という条件から NEA GaAs 陰極がほぼ唯一の選択肢である．NEA GaAs については種々の層構造やや不純物の添加などにより様々な種類の陰極が開発されてきているが [34], 現在のところ, 高い量子効率と偏極度を両立するものとして名古屋大学が中心となり開発された GaAs-GaAsP Strained Super-lattice 陰極 [50][55] が標準陰極として採用されている．その層構造を図 9.10 にしめす．GaAs 基板の上に GaAsP と GaAs の薄膜を作成し, 歪み超格子構造をつくるとともに, 表面は P を高ドープした GaAsP とする．この構造は後述する表面電荷制限の克服と高い量子効率, 偏極度を両立させるものとして開発されたものである．GaAs-GaAsP 歪み超格子陰極においては, 0.5% の量子効率において 90% の偏極度が得られている [55]. その後、金らの提案により、歪み補償型超格子カソードが提案され、やはり 90% を超える偏極度、1.5% の量子効率が実現された [56]。従来の歪み超格子カソードでは各界面において歪みが与えられるが、層を重ねるごとにその歪みが蓄積され、結晶品質の低下から超格子層の数には限りがあった。歪み補償型超格子では、相毎に異なる方向に歪みをかけることで、ローカルな歪みは維持しつつ、ネットの歪みはゼロになるような結晶成長上の技術を導入し、結晶品質を落とさずに層の数を増やすことで、従来は層の厚みにより制限されていた量子効率の改善を実現した。

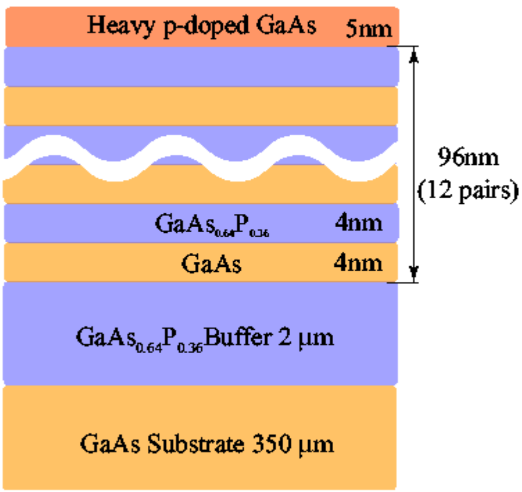


図 9.10　GaAs-GaAsP 超格子陰極の層構造．名古屋大学山本将博氏より提供．

陰極に NEA GaAs (GaAs-GaAsP 歪み超格子) を使用するとして, 次に電子銃本体の構造を決定しなければならない. ビーム引き出し方式として DC 型と RF 型があるが, 現在のところ, 任意の NEA GaAs 陰極を RF 電子銃内で安定的に動作させた実績は存在しない. 唯一, ロシアにおいて NEA 陰極を RF 空洞内に装着し, ビーム発生を試みた例が存在するが, 数発の RF パルスを印加した段階でビーム放出が失われてしまった [51]. おそらく理由は真空の急激な悪化であろうと思われる. RF 電子銃は RF 空洞を構成しなければならないため, その設計の自由度が小さく, 真空を改善するために真空のコンダクタンスを大きくすることは困難である. また, RF 空洞内では表面電場が高いために, 壁からのガス放出も大きく, 運転時の真空はより悪化する. 現在 NEA 陰極を RF 電子銃に使用し, RF 電子銃から偏極電子発生を目指す研究会 [52] が活動を続けているが, まだ検討段階にあるといえよう.

他方, NEA 陰極は名古屋大学 [34], 米国 SLAC[53], JLAB(Jefferson Laboratory)[57] などで DC 型電子銃の光電陰極として長年にわたり実績を積み重ねてきている. 技術の成熟度の差を考えれば, 引き出し方式は DC 型とすることに現状では異論はないであろう.

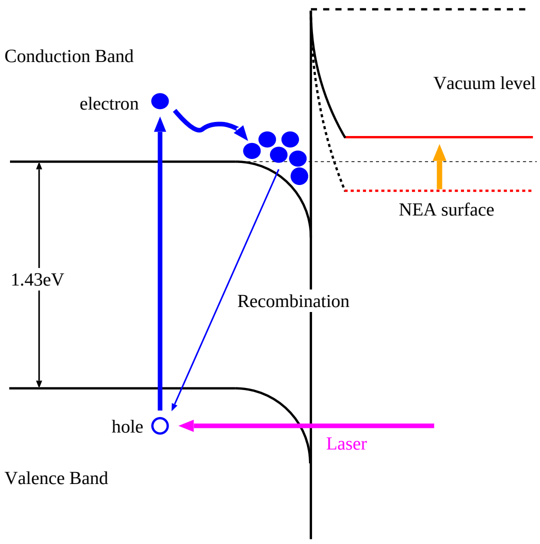


図 9.11 表面電荷制限現象の概念図. バンドベンディングによるギャップに捉えられた電子により実効的な真空準位は上昇し, 電子放出は抑制される. 捉えられた電子は正孔と再結合することにより消滅する.

しかし一方で DC 型とすることで表面電場は低く抑えられ, 空間電荷効果により最大引き出し電流は抑制されることになる. さらに空間電荷効果とは別に, NEA GaAs 陰極の開発過程において, 表面電荷制限という別の抑制現象が観測された. この現象は陰極からの電流密度を高くしてゆくと, 充分なパワーの光子を照射しても放出電流が飽和してしまう, というものであった. この現象は単独のバンチを出力する場合は問題とならないが, ILC のように短いバンチ間隔で連続してマルチバンチ発生を行う場合などは, 二番目以降のバンチ出力の低下および飽和という問題を引き起こす.

この現象は最終的に NEA 表面を生成する過程で必要なバンドベンディング, すなわち表面に電気二重層を形成することで真空準位を引き下げた時に生じるギャップに電子が捕獲されることが原因であることがあきらかとなった. ギャップに電子が捕獲されると真空準位が上昇し, 電子が真空へとでて行きづらくなるのである. 捕獲された電子は正孔と再結合して消滅するが, マルチバンチ発生など電流密度がある程度大きくなると, 電子の正孔との再結合よりも捕獲される電子の数が上回るようになり, 真空準位が徐々に上昇する. 真空準位が上昇すると電子はより捕獲されやすくなり, やがて電流密度が飽和するまで低下してしまう.

表面電荷制限をひきおこす捕獲された電子は正孔との再結合によりある寿命で, 再結合により消滅する. したがって再結合の確率を高めることにより, その寿命を短くして制限を克服し, 飽和電流の向上がみこめる. そのため, 陰極表面付近の GaAs には P を大量に添加し, 正孔密度を向上させることで, 表面電荷制限値を大幅に向上させることに

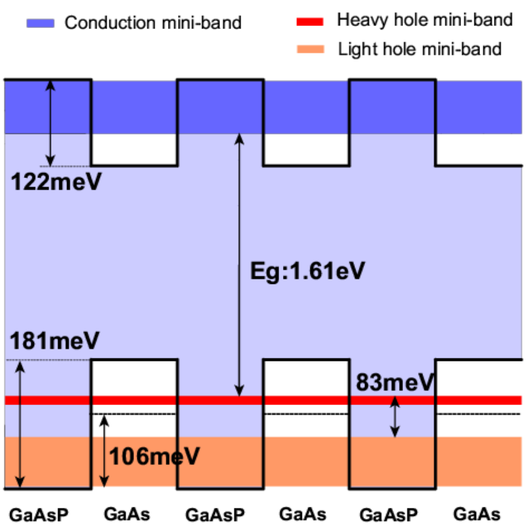


図 9.12　GaAs-GaAsP 超格子構造のバンド構造．名古屋大学山本将博氏より提供．

成功している [50][54]．図 9.12 は超格子陰極のバンド構造を表している．超格子構造により，バンド間隔が狭くなることで伝導帯に励起された電子は真空中へと脱出することがより容易となることに加え，表面に P を高ドープした層を設けることにより正孔密度を上昇させ，再結合確率を高めることにより表面電荷制限を克服した．

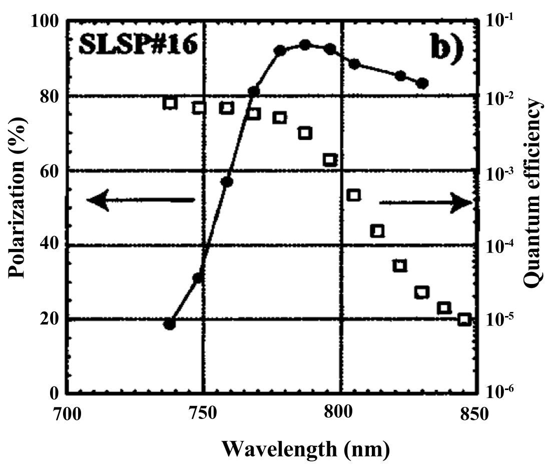


図 9.13　GaAs-GaAsP 歪み超格子陰極の量子効率と偏極度をレーザー波長の関数として表したもの．[55] より転載．

図 9.13 は量子効率と偏極度をレーザー波長の関数としてあらわしたものである．これより，GaAs-GaAsP 歪み超格子陰極を用いることにより量子効率として 1%，偏極度として 90% がみこまれることがわかる．量子効率の寿命を考慮しても，0.5% は仮定できるだろう．一般的に，量子効率は二つの現象論的な過程により減少する．一つは Dark life time とよばれ，真空中に放置した場合に，真空中の残留ガスなどによる陰極の化学的変化などにより，量子効率が

減少する現象である．Dark life time を τ_D と置くと, 量子効率 $\tau(t)$ は

$$\eta(t) = \eta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_D}\right), \tag{9.46}$$

と表される．η_0 は $t = 0$ における量子効率である．Dark life time は容易に想像されるように真空レベルとその質（残留ガスの種類と量）に大きく依存する．米国 Jefferson 研究所において, 2.2E+4 hour [57] という値が確認されている．したがって現在の技術レベルで可能な真空レベルおよび質を仮定すれば, 充分な寿命が得られる．

それに対して Beam life time と呼ばれる陰極寿命は引き出しビーム量に対して定義される現象論的なパラメーターである．引き出し電流を J (A/cm^2), Beam life time τ_B とおくと, 量子効率 η は

$$\eta(t) = \eta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_B/J}\right) \tag{9.47}$$

と与えられる．τ_B として 2.0E+5 C/cm2[57] という値が米国 Jefferson 研究所において得られている．この定義によれば, ビームを非常に狭いスポット径から高密度で引出した場合に, 寿命の低下が問題となる．エミッタンスはスポット径に比例するので, 極めて低いエミッタンスのビームを生成する場合はこれが問題となるが, 幸い ILC 電子銃の場合は要求されるエミッタンスは 10πmm.mrad 前後と極端に低いものではないので, 問題とはならないと思われる．

引き出し電圧は 120kV, バンチ電荷は 3.2nC である．NEA GaAs の応答性から決まるバンチ長はおよそ 20ps である．すなわち非常に短いレーザー光により励起した場合に得られるバンチ長は 20ps となるから, 実質的にこれ以下のバンチ長にするのは困難である．さらに 3.2 nC という高密度の電子ビームを DC 電場で引き出す場合には様々な制限が加わる．NEA GaAs 固有の制限として, 結晶内部での表面電荷制限という現象があるが, この問題は現在のところ燐を高密度で添加することにより $4-5$ A/cm^2 までその限界を緩和することに成功している．空間電荷効果による制限は, カソード径を 1 cm, 陰極陽極間距離を 5 cm とすると, Child-Langmuir 法則から決まるピーク電流は 3A となり, 結局 3.2 nC の電荷を引き出すのはおよそ 1.1 ns という時間必要である．この空間電荷制限が現在のところバンチ長を決定している．

このバンチ長はあきらかに RF 加速には長すぎるため, 10-20 ps 程度へのバンチングが必要となる．

第 10 章

陽電子発生

既に述べたように電子と陽電子は物理的な位置付けはまったく等価といってよい。しかしそれは陽電子が電子と同様の方法で得られるということを意味しない。なぜなら現実の世界は物質で埋めつくされており、半物質というものはほとんど存在しないからである。光電効果で陽電子を反物質からできている光電陰極から得るというのは原理的には可能であるが、現実的には困難である。

では現実に陽電子はどのように生成されているのであろうか。大きくわけて二つの方法がある。

一つめは $\beta+$ 崩壊を利用するものである。$\beta+$ 崩壊は放射性原子核中で陽子が中性子、陽電子、そしてニュートリノに崩壊する反応である。放射性物質は陽子シンクロトロンからの陽子ビームを標的に衝突させるなどして人工的に生成することができる。現在、先進的な医療診断装置として普及が進んでいる PET(Positron Emission Tomography) では、そのような方法で人工的に生成した $\beta+$ 崩壊を行う少量の物質を体内に送り込み、その物質が体内でどのように移動するかを観測することにより、診断を行う。体内で $\beta+$ 崩壊が生じると、発生した陽電子は電子と対消滅し、特性ガンマ線を放射する。このガンマ線を観測することにより、体内での物質の分布の密度をしることができる。この密度から例えば癌細胞の存在などをしることができるのである。

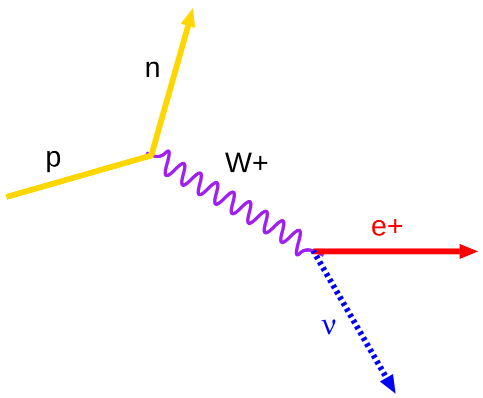


図 10.1　ベータ＋崩壊のダイアグラム。放射性原子核中で陽子が弱い相互作用を通じて陽電子とニュートリノを放出し、中性子へと変化する。

しかしこの方法は陽電子ビームを得るという目的には適してはいない。なぜならビームとして加速するためには時間的には短いパルスになっていることが必要であるが、原子核崩壊は純粋に確率的反応であり、その反応を制御することは原理的に不可能であり、時間的に連続して陽電子が発生するからである。また崩壊が進行するにつれてその強度は指数関数的に減少するため、ビーム密度を一定にたもつことが困難である。

そこで陽電子ビームを得るには二つめの方法、すなわち高エネルギーガンマ線と物質の相互作用による対生成反応を利用する。対生成反応は図 10.2 で示されているように、高エネルギーガンマ線が原子核と運動量を交換し、電子と陽電子を発生させる反応である。電子と陽電子の静止質量は $0.51\mathrm{MeV/c}^2$ であるから対生成を生じるためには少なく

とも静止質量の二倍である 1MeV/c^2 の質量相当のエネルギーが必要である。また、ガンマ線と物質との相互作用のうち、対生成と競合するものに光電効果とコンプトン散乱があり、主に 10MeV 未満の低エネルギー領域で支配的となる。従って効率的に対生成反応をおこすためには 10MeV 以上のエネルギーのガンマ線が必要となる。

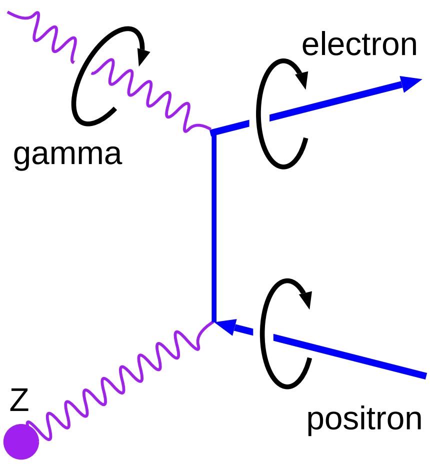


図 10.2　対生成反応のダイアグラム。高エネルギーのガンマ線は原子核などの外場との相互作用を得て、電子と陽電子を発生する。外場との相互作用は四元運動量の保存から必要となる。従って真空中では対生成反応は生じない。この反応ではヘリシティ保存から高エネルギーガンマ線が偏極（円偏光）していると、発生した電子と陽電子も偏極している。

さて、原理的に高エネルギーのガンマ線を生成し、それを物質に入射することにより陽電子ビームが得られる、ということがわかった。しかし高エネルギーのガンマ線をえることはそう容易ではない。例えば X 線管は数十 kV 以上の電圧で加速した電子を物質に入射し、制動放射により keV クラスの X 線を発生させる。従ってエネルギーをスケールすると、制動放射により MeV クラスのガンマ線を発生させるには、数 MeV 以上の電子ビームを物質に入射する必要がある、ということになる。実際、この方式でガンマ線を生成し、そこから陽電子を得る方法は最も一般的な方法として、今まで運転されてきた全ての陽電子加速器で用いられてきている。それゆえに、この方式は Conventional（在来の、平凡な） 方式と呼ばれているが、後述するようにこの他の方法の開発もすすんできており、この名称が将来にわたり相応しいとは言えない。正確には電子ビーム駆動方式などと呼ぶべきであろう。

実際に電子ビームを物質に入射すると制動放射によりガンマ線が発生する。標的にタングステンなどの密度の高い物質を用いれば、発生したガンマ線はほどなく対生成をおこし、電子と陽電子となる。この発生した電子および陽電子はエネルギーが高ければ再び制動放射を起こしてガンマ線を発生する。その他にもガンマ線が物質中の軌道電子をコンプトン散乱により叩き出すなどの反応が生じる。以上のように電子ビームを物質中に入射するとガンマ線の生成だけでなく、様々な反応が連鎖的に生じ、結局のところ大量の電子、陽電子、ガンマ線が発生する。このような一連の反応のことを電磁シャワーと呼ぶ。原理的には電子あるいは発生した陽電子が制動放射によりガンマ線を生成し、そこから対生成により陽電子が得られるのであるが、実際には電子ビームを物質に打込むと内部で電磁シャワーが生成され、そこから陽電子を選び出す、ということになる。

制動放射以外に高エネルギーガンマ線を生成し、そこから陽電子ビームを得る方法として、現在二つの方法が考案されている。一つめは高エネルギーの電子ビームを周期磁場（ウイグラーまたはアンジュレーター）に通し、シンクロトロン放射により高エネルギーガンマ線を得るというものである。アンジュレーター方式と呼ばれるこの方法は 100 GeV 以上の高エネルギー電子ビームを必要とすることから、高価であり現実的でないとされてきた。しかしリニアコライダーにおいては衝突用に 250GeV から 500GeV の電子ビームが用意されるので、これをガンマ線生成にも利用することでにわかに現実味をおびてきている。

二つめの高エネルギーガンマ線を生成する方法としては高エネルギー電子ビームとレーザーのコンプトン散乱によ

るガンマ線生成である。この場合、必要な電子ビームは数 GeV 程度と在来方式とほぼ同じであり、この点においては在来型に比して遜色はない。しかし現実的な電子ビームとレーザーのパラメーターから予測されるガンマ線数が $10^4 \sim 10^5$ と、他の方法に比べて極端に低く、充分な陽電子密度が得るのが困難である。しかし近年、モードロックレーザーによる高い繰り返し、高出力化が大いに進展をみせ、さらに光学蓄積空洞によるレーザー密度の増倍因子 $10^2 \sim 10^4$ が現実味を帯びるなど、生成ガンマ線数が必要な値に近付きつつある。これらに加え、生成された陽電子ビームの他数回蓄積を行うなどの粒子加速器における工夫を行うことで、ILC の陽電子源として実現可能である、との検討結果もある [60]。

何らかの形で高エネルギーガンマ線を生成し、その対生成プロセスにより陽電子を得る、という方法は以上のように全ての方法に共通している。技術的に見れば、高エネルギーの電子ビームあるいはガンマ線を生成標的に入射し、そこで生じる様々な反応の結果、電子、陽電子、そしてガンマ線の混合ビームが得られる。その混合ビームから二重極マグネットを用いて陽電子ビームを選別することにより、陽電子ビームが得られる。

10.1 陽電子捕獲

陽電子ビームはガンマ線による対生成から生じるが、発生した陽電子の運動方向および運動エネルギーは広く分布している。生成ドライバーである電子ビームおよびガンマ線のビーム径は典型的には数 mm^2 以下であるから、生成された陽電子は大きい横方向運動量およびエネルギー広がりをもつ一方、ビーム径は数 mm^2 以下となっている。横軸に実空間、縦軸に横方向運動量を取り、位相空間でみると、縦長に細く分布している。

この分布のままビームをドリフトさせると、横方向運動量の大きい広がりは実空間へと伝播し、ビーム径が発散してしまい、加速が困難となる。従ってビームを速やかに収束し、横方向運動量を抑える必要がある。つまり実空間分布を加速が可能なサイズ、現実的には加速管のアイリス径程度まで拡大させる一方、横方向運動量分布を抑制する。すなわち、位相空間で横長の分布へ変換しなくてはならない。

このような変換を行うデバイスとして、QWT(Quarter Wave Transformer) と AMD(Adiabatic Matching Device) という二種類が考案されている。双方ともビーム進行方向に平行な軸に沿ったソレノイド磁場を用いる点は共通しているが、進行方向の磁場プロファイルに特徴がある。以下その概要と動作原理について説明する。

10.1.1 QWT

QWT(Quarter Wave Transformer) は陽電子生成標的出口から下流における強いソレノイド磁場領域 (磁場 B_i) と、それに続く弱いソレノイド磁場領域 (磁場 B_f) からなる。ソレノイド磁場の方向はビーム軸に対して平行である。図 10.3 はビーム進行方向を z 軸、生成標的出口を $z = 0$ にとり、軸方向の磁場プロファイルを表したものである。QWT という名称は、位相空間において、縦長の分布を横長に変換する、ということから来ている。この変換はちょうど位相空間における 90 度回転だから、波長にすると 1/4 波長 (Quarter Wave) に相当するのである。

QWT における陽電子の捕捉（横方向運動量の抑制）を理解するために $z = 0$ において、長手方向運動量 $p_z = p_{z0}$ および横方向運動量 $(p_x, p_y) = (0, p_t)$ を持つ陽電子の運動を考えよう。陽電子の初期位置は $(x, y) = (0, 0)$、すなわちターゲット中心と仮定する。電磁場中で荷電粒子はローレンツ力 $\vec{F}$ を次のように受ける。

$$\vec{F} = e\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \tag{10.1}$$

ここで $\vec{E}$ は電場、q は電荷、$\vec{v}$ は粒子の速度ベクトル、そして $\vec{B}$ は磁束密度である。ここでは電場がないので、$\vec{E} = 0$ とおける。また、磁束密度が z 軸に平行とすると、横方向運動量のみがローレンツ力に寄与するので、以下のようになる。

$$\vec{F} = \frac{e\vec{p_t} \times \vec{B_i}}{\gamma m}, \tag{10.2}$$

ここで e は素電荷、m は陽電子質量、γ は相対論におけるガンマ因子である。力の方向は xy 面内にあり、かつ横方

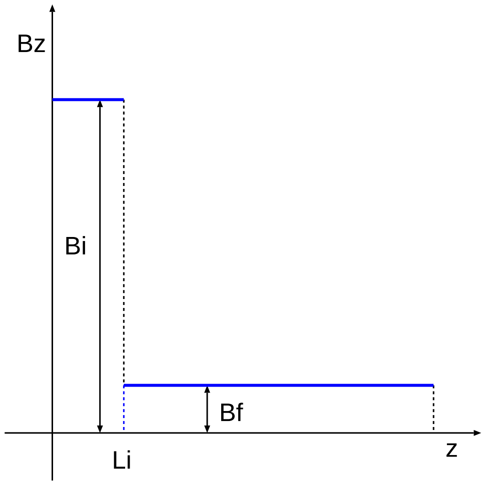


図 10.3　QWT の磁場プロファイル。横軸は生成標的からの距離、縦軸はビーム軸中心における平行磁場成分の値を表す。

向運動量に垂直となる。よく知られたように、このような力をうけた粒子は xy 面内において円運動を行う。円運動の曲率半径 ρ と向心力 F は $F = p^2/(\gamma m\rho)$ の関係にあるから、曲率半径 ρ は

$$\rho = \frac{p_t}{eB_i}, \tag{10.3}$$

と与えられる。初期位置は標的中心であるから、円軌道は $(x, y) = (0, 0)$ を通る。その陽電子は横方向運動量によって決る曲率半径で円運動を行うが、$(x, y) = (0, 0)$ における接線は初期の横方向運動量 $(p_x, p_y) = (0, p_t)$ に等しい。ソレノイド磁場の方向を z の負の方向とした時の xy 平面内での運動の様子を図 10.4 にしめす。

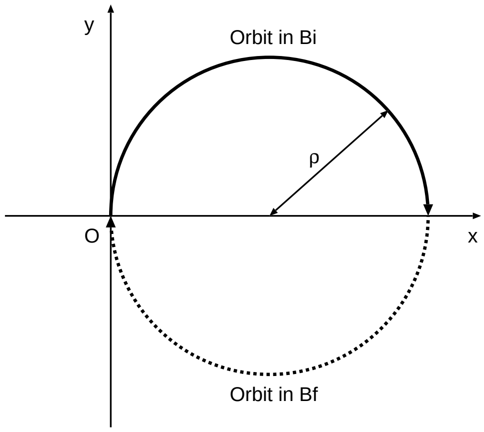


図 10.4　QWT における陽電子の xy 平面内での軌道の例。初期運動量を y 軸に平行としている。半周した時に調度 $B_i \rightarrow B_f$ の磁場境界に到達した陽電子は横方向運動量を抑制する力をうけるが、その大きさは磁場の変化にちょうどスケールしており、軌道半径を変えずに円運動を継続する。

z 軸方向に粒子は力をうけないから、陽電子は等速 p_z/m で運動を行う。ここで陽電子が $z = L_i$、すなわち磁場境界に到達した時点で調度軌道が円を半周描いたと仮定する。図 10.4 で原点以外の x 軸との交点に陽電子があると仮定しよう。その時、以下の条件が満足される。

$$\frac{L_i}{p_{z0}} = \frac{\pi\rho}{p_t}. \tag{10.4}$$

さて、以上の条件のもとに磁場境界にさしかかった陽電子はどのような力をうけるであろうか。図では $z = L_i$ において不連続的に磁場が変化しているが、現実には変化は連続的である。磁荷というものは存在しないから、磁束

密度が変化するということは磁束の一部がある領域から出ていったり、入ってきたりしている、ということである。$z = L_i$ 付近でソレノイド磁場は弱くなるのであるから、磁束はラッパ状に外に広がってゆく。ソレノイドは中心対称であるから、その方向は常に中心から外に向かっている。すなわちソレノイドの端部では径方向の磁場成分が発生するのである。

簡単のため、単独の磁束密度 B のソレノイド磁石を考えよう。無限円からソレノイド中心まで粒子を移動したとする。ソレノイド中心において距離 r の円内にある磁束は面積に比例するから、$B\pi r^2$ である。無限遠では磁束は存在しないから、無限遠からソレノイド中心に移動する間に磁束は半径 r の円を通過してゆく。即ち粒子が横切る磁束は

$$B_r(r) = \frac{B\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}\frac{B}{dL}, \tag{10.5}$$

となる。一般的にはこのような一次の項だけではなく、高次の寄与も考える必要があるが、近似としては充分であろう。dL の因子は上のような磁束が距離 dL にわたり分布していることを示している。

QWT の場合は二つのソレノイド磁石が近接して置かれているが、有難いことに静電場の線型性のために二つの寄与を単に足し合わせればよい。符号も考慮すると陽電子が横切る磁束は

$$B_r(r) = \frac{r}{2}\frac{B_i - B_f}{dL}, \tag{10.6}$$

となる。この時に陽電子が受ける運動量変化は $r = 2\rho$ として

$$dp = \frac{ep_{z0}}{m}\frac{2\rho}{2}\frac{B_i - B_f}{dL} = p_t\frac{B_i - B_f}{B_i}ds, \tag{10.7}$$

となる。

さて、$z = L_i$ において粒子が $(x, y) = (2\rho, 0)$ にある場合、磁束は x 軸の負の方向を向いている。したがって受ける運動量変化の方向は y 軸の正の向きとなる。従って横方向運動量は

$$p_t = p_{t0}\frac{B_i - B_f}{B_i} - p_{t0} = -p_{t0}\frac{B_f}{B_i}, \tag{10.8}$$

となり、その大きさは B_f/B_i だけ小くなるのである。B_f 領域にはいってからの陽電子の円運動の曲率半径は

$$\rho = p_{t0}\frac{B_f}{B_i}\frac{1}{eB_f} = \frac{p_{t0}}{eB_i}, \tag{10.9}$$

とちょうど B_i 領域と同じになる。つまり図 10.4 で示されているように条件を満す陽電子は QWT 内で同じ曲率の円運動を続けるのである。

この陽電子がビームとして捕獲されるためには、この円運動が後段の加速管の開口径に収まらなくてはならない。加速管の開口径はアイリス部のサイズで決るから、これを直径 $2a$ とすると、

$$a > 2\rho = 2\frac{e_{t0}}{eB_i}, \tag{10.10}$$

でなくてはならない。これは陽電子の横方向運動量に制限を与える。

条件式 10.4 からずれた陽電子の軌道はどのようになるのだろうか。まず磁場境界にきたとき、円運動の位相が 180 度よりも小さい場合を考えよう。図 10.5 における A 点に陽電子がきた場合である。その場合でも、運動量変化は式 10.5 で表されるので、動径方向に垂直である。A 点における p_t はベクトル α_1、磁場による運動量変化はベクトル α_2 のようになる。従って陽電子の運動方向は α_1 から α_3 に変化する。つまり運動方向は外向きになり、円運動の回転中心は外側に移動する。また磁場が B_f に弱まることにより回転半径が大きくなるので、より外側を大きく回転することになる。したがって加速管壁などに衝突し、捕獲することは困難である。

図 10.5 の B 点に陽電子がきた場合を考えよう。その場合は運動方向は β_1 より β_3 のように変化するが、この場合も回転中心は外側に移動する。また回転半径も磁場が弱まることで大きくなるので、外側をより大きな回転半径で運

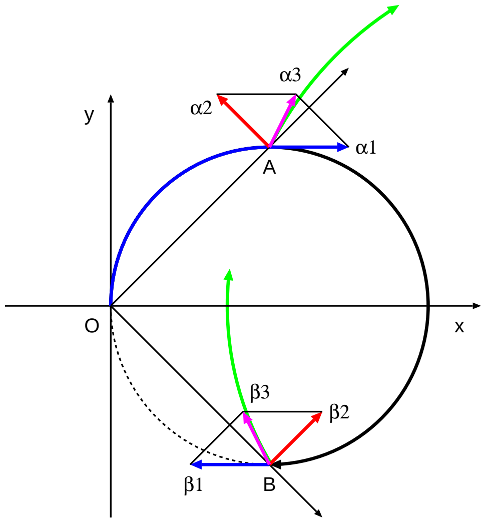


図 10.5

動するようになり、前の例と同様に捕獲は困難となる。つまり条件式 10.4 からずれた陽電子は、いずれの方向でもより捕獲が困難となるのである。

QWT は実際には二つの磁場のことなるソレノイド磁石をならべて配置することにより実装される。電流制限などの技術的制約から、上流の強い磁場は口径の小さいソレノイド磁石を、下流の弱い磁場は口径の大きいソレノイド磁石を使用する。下流の弱い磁場の領域には加速管が設置され、陽電子の軌道を加速管のアイリス径以内に保ちつつ加速を行い、相対的な横運動量を小さくするとともに、相対論のガンマ因子を大きくすることで空間電荷効果による発散力を抑制し、陽電子をビームとして捕獲する。

KEKB の陽電子源には陽電子収束デバイスとして QWT が採用されている。初段の強磁場領域は長さ 45mm、コイル長は 42.5mm で、内径 20mm で、磁場は 2.3T である。8 ターンのコイルに 10kA の電流を流すことで上記の磁場を実現している。

10.1.2　AMD

AMD(Adiabatic Matching Device) は生成標的出口に磁場のピークがあり、それが徐々に低磁場へと減少していくようなビーム軸方向に平行なソレノイド磁場からなる。図 10.6 に磁場プロファイルを示す。$z = 0$ では $B_z = B_i$ であるが、それが B_f まで図で示されているように低減し、その後一定に保たれる。変化領域での磁場プロファイルは

$$B(z) = \frac{B_i}{1 + \mu z} \tag{10.11}$$

で与えられる。μ は磁場の変化を表すパラメーターで $/m$ の次元を持つ。変化領域の長さを L_i とすれば、

$$B_f \equiv B(L_i) = \frac{B_i}{1 + \mu L_i}, \tag{10.12}$$

となる。

低磁場領域には加速管が設置され、捕獲された陽電子を加速することでその相対的な運動量広がりを徐々に低減しつつ、空間電荷効果を抑制しビームを「硬く」する。

AMD においては軸方向磁場が徐々に低減するために、QWT で磁場境界でのみ出現した動径方向の磁場が常に存在する。QWT の場合と同様に陽電子は回転運動を行うが、この動径方向の磁場により、xy 平面内において常に動径方向に垂直な運動量キックを受け続けることになる。QWT において、同期条件から外れた場合の陽電子の運動を考

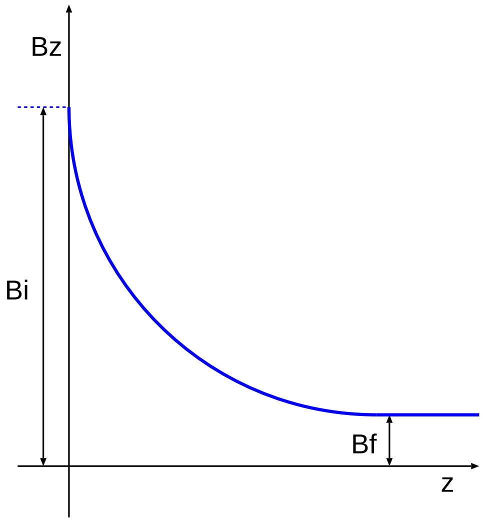


図 10.6

えた場合と同様に、AMD の場合は「同期条件」からはずれているので、回転中心は徐々に外に移動する。また磁場によるキックにより横方向運動量は徐々に低減していく。この運動には断熱不変量が存在し [61]、

$$\int \sum_i p_i dp_i = \frac{\pi p_t^2}{eB}, \tag{10.13}$$

は運動の不変量となる。これにより

$$\frac{p_t(z)^2}{B(z)} = \frac{p_{t0}^2}{B_i}, \tag{10.14}$$

という関係が成り立つことがわかる。横方向運動量は

$$p_t(z) = \sqrt{\frac{B(z)}{B_i}} P_{t0}, \tag{10.15}$$

のように変化する。軌道半径は

$$\rho(z) = \frac{1}{e\sqrt{B(z)B_i}} p_{t0}, \tag{10.16}$$

のように徐々に増大するが、横方向運動量が減少していくため、その増大は抑制されている。陽電子が B_f 領域に入ると回転半径は一定となり、その大きさは

$$\rho_f = \frac{1}{e\sqrt{B_i B_f}} p_{t0}, \tag{10.17}$$

となる。QWT と同様にこの曲率半径の二倍が加速管の開口径よりも小さくなくてはならないので、陽電子捕獲の条件として

$$a > 2\rho_f, \tag{10.18}$$

が満されてなくてはならない。

AMD は QWT にあったような、長手方向と横方向の運動量に関する条件は存在しない。どのようなエネルギーであっても断熱不変量に従い横方向運動量は低減され、ある程度の円運動として取り込まれる。しかしあまりにも縦方向運動量が大きいと xy 平面内の回転運動に比して、磁場変化が急激となり、もはや断熱運動とはみなせなくなってしまう。従って AMD においてもエネルギーの上限値は存在する。解析によると、長手方向の運動量が

$$p_z < 0.5 \frac{eB_i}{\mu}, \tag{10.19}$$

以下である必要がある。

AMD の磁場分布をは Flux Concentorator と呼ばれるデバイスにより実現される。Flux concentrator にはいくつかのタイプがある。ひとつめは螺旋状のコイルに大電流を流すことで内部にソレノイド磁場をつくるものである。コイルの内径を巻き貝のように徐々に細くすることで、一方の端部で極めて高い軸上磁場を実現する。このタイプの Flux Concentorator は SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) で使用されている。SLAC のものは長さ 100mm、ターン数 12、最小内径 3.5mm、最大内径 26mm で 16kA の電流を流すことで最高磁場 5.8T を実現している。もうひとつのタイプは銅の円筒の内部を円錐状に削りだし、その外部にコイルを巻いたもので、コイルに電流を瞬間的に流すと導体内部に渦電流が発生し、その渦電流により内部にソレノイド磁場が発生するというもので、やはり内径が小さくなるにしたがい強い磁場が生じるようになっている。このタイプのものは BINP(Budker Institute for Nuclear Physics, ノボシビルスク、ロシア) において使用されている。

10.2 陽電子源のコンセプト

これまで陽電子発生の原理と、その発生した陽電子の捕獲について議論した。これらを組合せることでいくつかの陽電子源コンセプトが形成される。以下、各々の方式についてその基本的な特性を中心に説明する。

10.2.1 電子ビーム駆動方式

電子ビーム駆動方式は今まで建設された加速器用の陽電子源の全てに採用されている。唯一実績のある方法として、その安定性と信頼性においては他の方法に比べて長じているのはあきらかだろう。その基本的な構成は図 10.7 に示されているように、電子源および電子ライナック、陽電子生成標的、収束デバイスと初段加速空洞からなる陽電子捕獲セクションからなる。

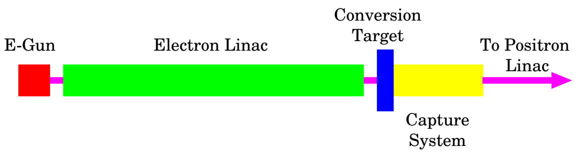


図 10.7 在来方式（電子ビーム駆動方式）の概念図。高エネルギー電子ビームを電子ライナックにより生成し、それを標的に入射することで電磁シャワーを成長させる。そこから得られる陽電子ビームの横方向運動量を収束デバイス（QWT あるいは AMD) で抑制しつつ、加速することで捕獲し、陽電子ビームを形成する。

典型的な電子ビームのエネルギーは数 GeV である。数 GeV の電子ビームを生成標的に打込むと

- 制動放射、
- コンプトン散乱、
- 対生成、
- 電子（陽電子）- 軌道電子散乱、

などのプロセスがカスケード（雪崩）状に生じ、電磁シャワーが発生する。電磁シャワーとは電子、陽電子、そしてガンマ線の混合した流れである。この電磁シャワーの発達のようすは用いる標的物質によって異なるが、放射長 (Radiation Length, X_0) という概念をもちいることにより物質に依存せずに議論することができる。放射長は電子が物質中を相互作用によりエネルギーを失いながら進行するとき、初期エネルギーの $1/e$ に減衰するまでの距離を密度で規格化したものとして定義される。電磁シャワーの発達の様子は物質により異るが、各々の物質における放射長で

計った距離における電磁シャワー発達の様子はほぼ等しいということがわかっている。放射長は近似的に

$$X_0 = \frac{716.4A}{Z(Z+1)\ln(287/\sqrt{Z})}[g/cm^2], \tag{10.20}$$

と表される。ここで A は物質の質量数、Z は原子番号である。この式より原子番号の大きな物質ほど放射長が短く、すなわち短い距離で電子が急激にそのエネルギーを失い、そのエネルギーが電磁シャワーに転化するということを表している。放射長を実際の距離にするには密度で除する必要があるので、結局原子番号が大きく、密度の高い物質ほど効率的に電磁シャワーを生成することができる、ということになる。

さて、放射長を指標として物質中で電磁シャワーは粒子数を増やしてゆく。それに従い一つあたりの粒子が有する平均のエネルギーは減少してゆくので、ある時点で対生成の有効しきい値を下回り、シャワーの発達は飽和する。またシャワーにより生成された粒子はある確率で物質により捉えられ、あるいは散乱され、失われてゆく。このような二つの競合プロセスにより、電磁シャワーの粒子数はある放射長で再大値をとる。この状態を Shower Max と呼ぶ。Shower Max に対する現象論的な式は次のように与えられる。

$$T_{max} = 1.0\left[\ln\left(\frac{E_0}{\epsilon_0}\right) - 1\right], \tag{10.21}$$

ここで T_{max} は放射長で測った Shower Max の位置、E_0 は入射電子のエネルギー、そして ϵ_0 は Critical Energy と呼ばれるパラメーターである。これによると Shower Max は入射エネルギーに依存し、より高いエネルギーでは大きな値となるが、その依存性は線型ではなく、対数的であるということがわかる。すなわちエネルギーをかえても、エネルギーほどは Shower Max の値は変らない、ということを表している。

さて標的の厚さを変えた場合、標的出口からでてくる陽電子について考えよう。生成される陽電子の積分数は標的の厚さを厚くすればするほど増加する。しかし生成された陽電子は標的物質との相互作用で失われてゆくので、得られる陽電子数は積分値ではなく、ある放射長位置での陽電子数で決る。充分にシャワーが発達した後では、陽電子数と電子、ガンマ線の割合が一定と仮定すると、この陽電子数最大の地点は Shower Max と一致する。すなわち、標的厚さは Shower Max にすることで、陽電子の収量は最大となる。

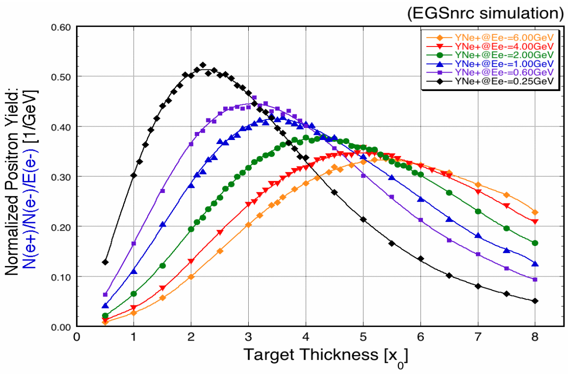


図 10.8　横軸に標的厚さを放射長であらわした陽電子生成数。異なる入射エネルギーの曲線を描いている。KEK 紙谷氏より提供。

図 10.8 は横軸に放射長をとり、縦軸に相対的な陽電子生成数をとり、異なる入射電子ビームエネルギーによる依存性をあらわしたものである。入射エネルギー 6GeV において Shower Max はおよそ 5X$_0$、2GeV では 4X$_0$、そして 1GeV において 3X$_0$ 付近となっている。Shower Max の入射エネルギー依存性がゆるやかなものであることがわかる。またある決まったエネルギーにおいて、陽電子の収量の放射長依存性も緩やかなものである。一方、入射エネルギーによる電子あたりの陽電子の収量はエネルギーにより大きく変化している。その依存性はほぼ線型であることが知られている [61]。

標的としては原子番号が大きく、密度が高く、かつ融点の高い物質としてタングステンがよく用いられる。タングステンは原子番号 74 の常温で固体の金属で、密度 19.3g/cm^3、放射長は 6.76g/cm^2、融点は 3695K であるので、一放射長の長さは 0.35cm となる。したがって数 GeV のドライブ電子ビームを、例えば 4X$_0$ ~ 1.4cm 厚のタングステン標的に入射することで効率的に陽電子を生成することができる。実際の陽電子生成は陽電子捕獲にもよるが、ドライブ電子ビーム 6 GeV において 4 放射長のタングステン標的を用い、陽電子捕獲に AMD を採用したばあい、入射電子あたり 1.0 の陽電子が得られる。

参考のため、表 10.1 に様々な加速器における陽電子源についてまとめてある。

表 10.1　様々な加速器における陽電子源の特性。ILC については電子ビーム駆動方式の数値を掲げてある。これを含め、全ての陽電子源は電子ビーム駆動方式である。[62] より抜粋。

Machine	Energy (GeV)	Current (A)	Rate (Hz)	Target Material	Thick-ness(r.l.)	Power Dep. (kW)	Matching	RF* (MV/m)	Yield (/e-/GeV)
ILC	6.00	2.E+10	5*2820	W-26Re	4.0	30.00	SS+S	12 - 15	0.150
SLC	30.00	4.E+10	120	W-26Re	6.0	4.00	FC+TS+S	19	0.030
APS	0.20	1.0	30	W	2.0	0.48	S	-	0.006
CESR	0.15	1.7	60	W	2.0	0.30	1/4 PS+S	10	0.013
BEPC	0.15	2.4	25	W	1.7	-	TS+S	10	0.025
SP-8	0.25	10.0	8	W-10Cu	2.0	1.00	PS+S	17	0.012
KEK	0.25	10.0	25	Ta	2.0	2.00	1/4 PS+S	8	0.018
ORSAY	1.00	1.0	25	W-2Cu-2Ni	7.0	0.50	FC+S	10	0.021
SOLEIL	0.34	0.7	10	W	2.0	0.14	1/4 PS+S	15	0.020
DESY	0.40	1.5	50	W	2.0	2.00	1/4 PS+S	14	0.025
VEPP-5	0.30	1000.0	50	W	2.5	0.02	FC+S	18	0.050
LIL	0.20	1.4	100	W	2.0	0.60	1/4 PS+S	9	0.030

10.2.2　Undulator 方式

Undulator 方式の基本構成は図 10.9 に示されているように、高エネルギーの電子ビームを通過させることによりガンマ線を生成するためのアンジュレーター、ガンマ線を対生成過程を通じて陽電子に変換する生成標的、発生した陽電子を加速許容領域に捕獲するための陽電子捕獲セクションからなる。

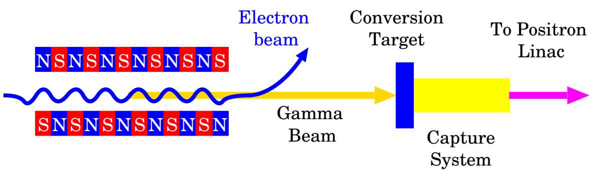


図 10.9　Undulator 方式の概念図。高エネルギー電子ビームがアンジュレーターを通過することでシンクロトロン放射によりガンマ線が発生する。そのガンマ線が生成標的中で対生成により陽電子、電子対に変換され、陽電子捕獲セクションによりビームとして形成される。

電子などの荷電粒子が加速運動を行うと必ず双極電磁場が放射される。電子の静止系からみると、加速ベクトルで定義される平面からの角度を θ' とすれば、その強度分布は $\cos^2\theta'$ とトーラス状になる。これを磁場中を運動する電子に当てはめてみると、磁場中での運動においては、常に運動方向と加速方向は垂直であるから、トーラス状の電気双極子放射は、電子の運動方向、すなわち加速軸に対して垂直方向に大きくブーストされることになる。実験室系においてこの放射を観測すると、その放射強度は

$$tan\theta = \frac{sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' - \beta)}, \tag{10.22}$$

となる。θ は実験室系において、ブースト軸からの角度である。この式で、$\theta' = \pi/2$ とおいてみると、$\tan\theta \sim \theta \sim 1/\gamma$ となる。すなわち実験室系でみると、放射場のほとんどはブースト軸から $1/\gamma$ 程度の角度広がりの中にはいっていることになる。これから、高エネルギーで移動する電子が磁場により加速される場合に放射される双極子場は電子の移動方向に極めて集中した指向性のよい放射場となることがわかる。この放射現象をシンクロトロン放射という。

シンクロトロン放射は当初は電子シンクロトロンの副産物として偏向磁場において観測されたが、その後この現象を光源として積極的に利用する立場から周期磁場によるデバイスが開発され使用されている。周期磁場として

$$B_y(s) = -B_0 \sin\left(\frac{2\pi s}{\lambda_u}\right), \tag{10.23}$$

を仮定する。B_0 は最大磁場、s は長手方向の座標、λ_u は磁場の周期長、そして y 成分以外の磁場はゼロとする。すると電子のジグザグ運動は x 方向のみに生じ、その角度変化は [63]

$$\dot{x}(s) = \frac{K}{\gamma}\cos\left(\frac{2\pi s}{\lambda_u}\right), \tag{10.24}$$

となる。K は強度パラメーターで

$$K = 93.4 B_0[T]\lambda_u[cm]. \tag{10.25}$$

シンクロトロン放射は電子の進行方向、すなわち式 10.24 で示される方向に $1/\gamma$ の広がりで放射されるから、得られる光の特性は K によって大きく異る。なぜなら式 10.24 から角度広がりが K/γ であるから、$K < 1$ であれば異なる位相から放射された光の干渉が観測される。それにたいして $K >> 1$ の場合、異なる位相から出て来た光は重ならないので、各々の位相で放射された光がその放射角度に応じて観測される。$K >> 1$ の場合をウイグラー磁場、$K \leq 1$ をアンジュレーター磁場と呼ぶ。

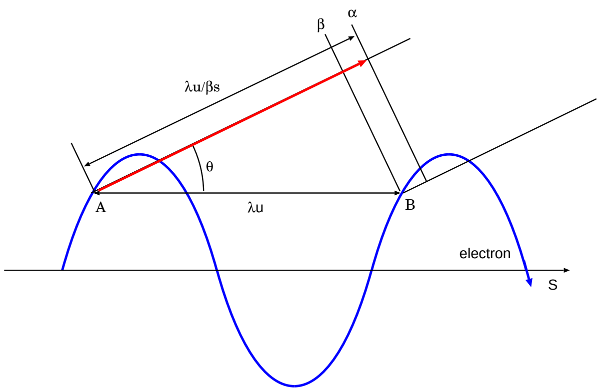


図 10.10　アンジュレータ-内の電子軌道と放射。電子は三角関数の軌道を通るので、となりの同位相の地点（A と B）から各々放射された光の波面は一致しない。B に電子が到達しそこで光が放射される時点で、A で放射された光の波面はすでに α まで到達している。

アンジュレーター内で電子はジグザグ運動を行うので、その s 方向の移動速度は相対論的な電子であっても光速よりも遅くなる。その様子が図 10.10 に示されている。磁場の周期長だけ異なる地点からの放射場の波面はこの効果によりずれることになるが、このずれの大きさが波長の整数倍になっていれば、干渉によりその波長の放射は強められる。したがってアンジュレーターからの光の波長は以下の条件を満す [63]。

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2}(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2\gamma^2), \tag{10.26}$$

ここで λ は放射光の波長、n は調和数であり、波面のずれの長さを波長で量子化した値、θ は放射光が観測される角度である。これより、アンジュレーターから得られるガンマ線のエネルギー $E_{ph}[eV]$ は次のように表される。

$$E_{ph}[eV] = 950\frac{nE^2[GeV]}{\lambda_u[cm](1 + \frac{1}{2}K + \theta^2\gamma^2)}, \tag{10.27}$$

ここで E は電子エネルギー (GeV)、λ_u はアンジュレーターの周期長を cm で表したもの、B_0 は最高磁場 [T] である。

アンジュレーターによりガンマ線を生成し、そこから陽電子を得るためには、ガンマ線のエネルギーが対生成のしきい値は勿論のこと、物質中での断面積において対生成が支配的となるエネルギーである必要がある。10MeV を下回るエネルギーにおいてはコンプトン散乱が支配的であるから、ガンマ線のエネルギーは 10MeV あるいはそれ以上でなければならない。電子ビームのエネルギーを 150GeV, 磁場の特性パラメーター $K=1$、最高磁場 $\mathrm{B}_0 = 1.0\mathrm{T}$、周期長を $\lambda_\mathrm{u} = 1.0\mathrm{cm}$ とすると、得られるガンマ線のエネルギーは一次調和周波数でおよそ 10 MeV となる。すなわちアンジュレーターからのガンマ線で陽電子を生成するにはドライバー電子ビームのエネルギーは 150GeV 以上である必要がある。

今までの実現された電子ビームの最高エネルギーは CERN-LEP のおよそ 100 GeV である。またリニアックによる最高エネルギーは SLAC-SLC のおよそ 50 GeV である。つまりいままで陽電子生成に必要な高エネルギー電子ドライバービームが存在しなかったのが、アンジュレーター方式により陽電子生成が行われなかった理由である。

電子ビーム駆動方式の入射電子ビームのエネルギーにに比べて、ガンマ線のエネルギーは三桁近く低いことになる。この事は生成標的内における物質との反応において著しい違いを生ずる。電子ビーム駆動方式においては、入射電子は電磁シャワーを成長させ、その結果として陽電子が得られる。入射電子数で規格化した陽電子生成数はおよそ 0.1 - 1.0 である。10MeV 程度のガンマ線の入射では電磁シャワーはほとんど成長することができない。したがって数放射長相当の厚い標的を用いることは陽電子生成の収量をあげることにならずに、発生した陽電子の物質との相互作用による減収をもたらす。従って MeV レベルのガンマ線の入射による陽電子生成においては、電子ビーム駆動方式よりもかなり薄い標的が用いられる。

このことは「副産物」として、対生成反応に寄与するガンマ線は入射したもののうちほんの一部であるという低生成効率と、複雑なシャワーの成長という過程を経ないために陽電子が直接に入射ガンマ線による対生成反応からできるという反応の単純さ、という二つの特性をもたらす。

一つめの低生成効率のため、入射するガンマ線は必要な陽電子に比べて二桁ほど多くする必要がある。そのためにはアンジュレーターを通過する電子数を増やすか、アンジュレーターの長さを伸ばし、一つの電子から放射されるガンマ線数を増やさなくてはならない。

二つめの特性は、入射するガンマ線の特性により生成される陽電子を制御できることを表す。例えばガンマ線が円偏光（ヘリシティ ±1）の状態にあればヘリシティの保存により生成される電子と陽電子ともに偏極することになる。このため何らかの方法により偏極ガンマ線をつくることができたならば、偏極陽電子ビームの生成が可能となる。

またシャワーの成長がなく、反応に寄与しなかったガンマ線はそのまま通過してしまうため、電子ビーム駆動方式とくらべて陽電子生成数あたりの標的での熱の発生量が大幅に低下するというメリットもある。

これらの特性は次節で説明するコンプトン方式に共通のものである。

以上、アンジュレータ-方式についてまとめると以下のようになろう。アンジュレータ-方式で陽電子生成に必要な高エネルギーのガンマ線を生成するには強い磁場と短い周期長のアンジュレータ- に 150 GeV 以上という高エネルギーの電子を使用する必要がある。また薄い標的を用いるためにガンマ線の陽電子への変換効率が低いため、陽電子あたりのガンマ線数は多くしなければならない。そのためアンジュレータ-を長くしてガンマ線の収量を上げる必要がある。またシャワーが成長しないために、偏極ガンマ線により偏極陽電子の生成が可能であり、かつ陽電子生成数あたりの標的での熱の発生量が低く抑えられるというメリットがある。

10.2.3 Compton 方式

Compton 方式とはレーザー光と電子ビームのコンプトン散乱により生じるガンマ線を用いて陽電子生成を行う方法である。日本が中心となり推進されてきた GLC 計画などおいて検討がなされてきた [65]。そのスタディをベースとして、2005 年の米国、スノーマスにおける ILC WS においてこの方式をベースとした ILC の陽電子源が提案された。さらに、1TeV を超える重心系エネルギーにおける電子陽電子衝突による高エネルギー実験をめざす

CLIC(Compact LInear Collider) 計画における偏極陽電子源として、コンプトン方式をベースとすることが検討、提案されている [66]。

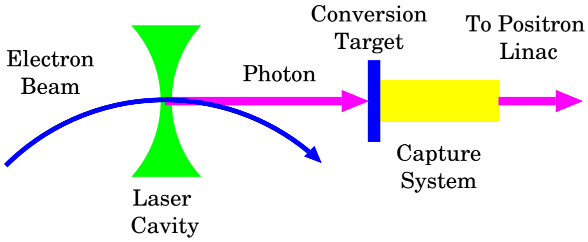


図 10.11　コンプトン方式による陽電子生成の原理をしめしたもの。電子ビームとレーザー光の散乱により発生したガンマ線を標的に入射し、対生成反応により陽電子を生成する。

図 10.11 にその基本構成が示されている。電子ビームとレーザーのコンプトン散乱により高エネルギーのガンマ線が生成される。そのガンマ線を生成標的で対生成過程を通じて陽電子に変換し、捕獲セクションでビームとして取り込む。

コンプトン散乱によるガンマ線生成の有利な点は高エネルギーのガンマ線を得やすいという点にある。アンジュレーター-方式においてはドライブのための電子ビームに 100GeV 以上という極めて高いビームエネルギーが要求されたが、コンプトン方式ではせいぜい数 GeV というエネルギーで充分である。この違いは電磁場の周期長の違いにある。アンジュレーター-の場合は周期長を磁極の並びでつくるので、大きな磁場を作るという制限もあり、せいぜい 1cm 前後が限界かと思われる。それに比べてレーザーの場合は波長がアンジュレーター-の場合の周期長に相当し、典型的な値は 1μm であり、桁にして四桁ほど小さい。周期長が小さいということは、それに比例して発生する光子の波長も短くなり、高いエネルギーのガンマ線を得やすいということである。コンプトン散乱の位置関係をを図 10.12 のように定義すると レーザーコンプトン散乱から発生するガンマ線のエネルギー E_γ は

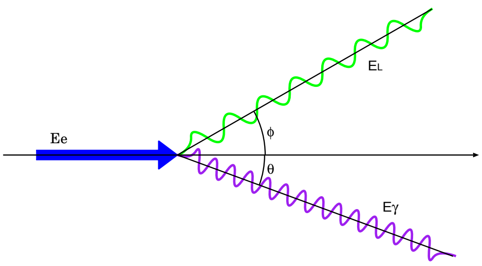


図 10.12　コンプトン散乱の位置関係の定義。軸上を進行する電子ビームに対してレーザー光は角度 ϕ で入射し、角度 θ 方向に散乱される。

$$E_\gamma = \frac{\gamma^2 mc^2(1+\beta\cos\phi)(1-\beta^2)E_L}{mc^2(1-\beta\cos\theta)+(1-\beta)(1+\cos\beta)(1+\beta\cos\phi)\gamma E_L}, \tag{10.28}$$

と与えられる。ここで γ と β は電子ビームのローレンツ因子と光速で規格化した速度、ϵ_L はレーザー光子のエネルギー、ϕ は衝突角、θ は散乱角、mc^2 は電子の静止エネルギーである。ここで phi と θ をゼロと仮定し、$\beta \sim 1$ とおくと、

$$E_\gamma \sim \frac{4\gamma^2 mc^2 E_L}{mc^2+4\gamma E_L}, \tag{10.29}$$

と近似できる。レーザーの波長は 1μm 付近であるから、およそ 1eV となる。電子ビームとして 1GeV 付近を考えると $\gamma \sim 2000$ となるから、分母は電子の静止質量の項が支配的となるので、結局

$$E_\gamma \sim 4\gamma^2 E_L \tag{10.30}$$

と近似できる。すなわちレーザー光子が電子と衝突することによりそのエネルギーを $4\gamma^2$ 倍とするのである。$\gamma \sim 2000$、$E_L \sim 1eV$ とすれば 16MeV のガンマ線が得られることになる。この値は陽電子生成には充分なものである。

その一方で、アンジュレータ-方式ではアンジュレータ-長を長くすることでガンマ線の生成数を増やすことができるのに対して、レーザーコンプトンにおいては同様の方法をとることは困難である。なぜならレーザー場は光速で移動してしまうから、電子との「接触時間」を増やすことができない。したがってレーザーコンプトン方式においてはガンマ線数をいかに稼ぐか、ということが課題となる。コンプトン散乱の断面積は Klein-Nishina の式から求めることができる。またこのときガンマ線の収量 Y は近似的に

$$Y = \frac{2N_e N_L \sigma L}{A\tau c}, \tag{10.31}$$

と表される。N_e と N_L は各々電子とレーザー光子の個数、σ が反応断面積、L が反応領域の有効長、A はビームの横方向広がり、τ はビームの長手方向広がり,C は光速である。この式からガンマ線の収量を上げるには電子の個数およびレーザー光子の個数を増やすとともに、反応領域（レーザーと電子ビームの幾何的な重なり）を大きくすること、さらにビームを自身の大きさは長手方向および横方向とも絞り込むことが重要となる。

そのための一つの方法として近年レーザー蓄積空洞を用いたレーザー光子の高密度化という技術が注目されている。これはファブリペローなどの光学空洞内に固有モードに合致したレーザー光を導入し、蓄積することで光子密度を向上させようとというものである。最も単純な系を考えよう。一往復する間の光の損失確率を P_{loss} とおく。これには反射ミラーでの損失などとならび、外部との結合なども含んだものである。このとき外部からパワー P_{drive} を導入すると、空洞内部でのパワー P_{cav} は

$$P_{cav} = \frac{P_{drive}}{P_{loss}}, \tag{10.32}$$

となる。例えば P_{loss} を 0.1% とした場合、空洞内でのパワーは 1000 倍とすることができる。電子ビームについては蓄積リング内を周回するビームを使用する方法などが考えられるだろう。

コンプトン方式による陽電子生成についてまとめると以下のようになる。ガンマ線生成においてはアンジュレーターの周期長に比べてレーザーの波長は極めて小さいため、電子ビームのエネルギーが低くても陽電子生成に充分な高エネルギーのガンマ線を容易に生成することができる。しかしアンジュレーターがユニット数を増やすことによりそのガンマ線の生成数をその長さに比例して増加させることができるのに対して、レーザーコンプトンに関してはそれが難しい。電子ビームやレーザー光の絶対数を増やすとともに衝突点で収束させることによりその密度を高め、さらに光学空洞による蓄積や、後述するモードロックレーザーと同期したパルス蓄積技術などを使ってガンマ線の生成数を充分に確保することが必要となる。

10.2.4 電子ビーム駆動方式による ILC 陽電子源

図 10.13 は電子ビーム駆動方式を陽電子源とした場合の ILC の概要を表している。この方式では電子源から ILC で要求されるビーム構造をそのまま電子ビームとして発生させる。すなわちバンチ間隔を 308ns あるいは 154ns として、各々連続した 2800 バンチあるいは 5600 バンチを一つのパルスとして発生させる。後述するように、電子ひとつあたりの実効的な陽電子生成数は 1.0 であるので、バンチあたりの電荷を 3.2nC あるいは 1.6nC とする。すなわちビーム構造は完全なコピーである。

電子ビーム駆動型では入射電子ビームが偏極したところで残念ながら陽電子ビームに偏極を得ることはできないので、電子ビームは偏極している必要はない。電子銃の候補としては DC 熱電子銃＋バンチャーあるいは RF 光電陰極銃が考えられるが、CsTe を陰極とした L-Band の RF 電子銃が DESY の TTF(Tesla Test Fascility) においてすでに稼働しており、1ms までのパルス運転も実証されているため、この技術をベースにして電子銃を構成する。CsTe を使用した場合、励起に必要なレーザー波長は 300nm 以下となるので、$\mathrm{Ti:Al_20_3}$ の基本波をのそのまま使用する

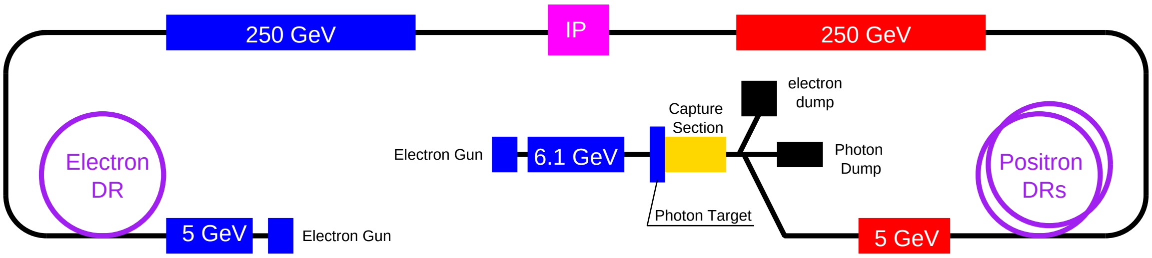


図 10.13　図は電子ビーム駆動方式をベースとした ILC の陽電子源を表している。

ことはできない。非線形結晶を用いて Ti : Al_20_3 から三倍波を作ることで、例えば発振波長として 800nm を選べば 233nm という UV 領域の光が得られる。あるいは Nd : YLF をモードロック動作させたうえで、その基本波長である 1064nm の四倍波を非線形結晶においてつくれば同様に 266nm の UV 領域の光を作ることが可能である。

L-Band の RF 電子銃で発生した電子ビームは超伝導加速空洞により 6.1 GeV まで加速される。その後陽電子生成標的に入射され、電磁シャワーから陽電子を取り出すことにより陽電子ビームを得る。標的として仮定されているのは W-Re である。W-Re はタングステンにレニウムを 26% 混合した合金であり、SLAC の SLC(SLAC Linear Collider) において、陽電子生成標的としての実績を持つ物質であり、タングステンよりも高い破壊限界を持つとされる物質である。しかしこの時、標的の熱的あるいは衝撃波などによる力学的な破壊が問題となる。なぜなら、ILC の生成するビーム量はかつてのどのような陽電子源よりも桁違いに多いからである。例えば入射ビームのパワーは

$$P = 6.1 \times 3.2 \times 2800 \times 5 = 273kW, \tag{10.33}$$

という膨大なものである。全てのエネルギーが標的中に落されるわけではないが、このような大きなエネルギーのかなりの割合が融点は高いとはいえ数 mm^2 のスポットに集中した場合、溶融や熱応力による破壊などの現象が当然予想される。

SLAC で行われた生成標的の破壊限界に対する実験 [71] によると、生成標的における入射エネルギーが 320J/mm^2 を上回った場合に標的破壊が観測されたということである。この実験はエネルギー（電子のエネルギーと電荷量の積）の異なるビームを多数回標的に入射して行われた。上記の値をしきい値として、この値を上回った条件では標的が破壊され、それ未満では標的破壊は生じなかった。しかも標的破壊はビームの入射回数には依存せず、しきい値よりもエネルギーがしたまわっておれば多数回入射しても破壊は生じなかった。

ILC のビームパワーは膨大なものであるが、一バンチあたりのエネルギーは

$$E_1 = 6.1 \times 3.2 = 19.5J \tag{10.34}$$

と SLAC での実験のしきい値のたかだか 1/16 に過ぎない。この単独バンチで標的破壊が生じないのは SLAC の実験で実証済である。また破壊しきい値は入射回数によらないので、この単独バンチで破壊されなければ標的は破壊されることはないという推測も成り立つ。

おそらく考えなくてはいけないのが、破壊プロセスの時間スケールという問題である。SLAC ではビームは 120Hz で繰り返し入射されたが、ILC の場合パルス内の繰り返しはおよそ 3MHz であり、けた違いに大きい。各々のバンチ間隔は 8ms と 300ns であるから、桁にして四桁ほど異なる。SLAC ではバンチ毎の効果は干渉しないと思われるが、ILC での短いバンチ間隔でビームを入射した場合、バンチ毎の効果がある時間スケールで重畳してゆく可能性が高い。その場合は標的破壊の可能性が大きいといえる。

電子ビーム駆動方式による ILC 陽電子源についてまとめておこう。表 10.2 は電子ビーム駆動方式による ILC 陽電子源の仕様である。接線速度は単独の標的を用いた場合に、金属疲労が生じないしきい値から決定されてもので、この値ならば標的交換をしないで連続運転が可能な条件である。従って複数の標的を用いた場合はこの値は低下する。さらに、特定のメンテナンス周期（標的交換）を仮定した場合は、さらに低い速度での運転が可能であろう。この速

表 10.2　電子ビーム駆動方式による ILC 陽電子源の仕様。単独標的を仮定。

特性	数値	単位
電子ビームエネルギー	6.1	Gev
電子ビーム量	2.0×10^{10}	個
ビームスポット	2	mm(rms)
標的物質	W23Re77	-
標的厚さ	4.5 (1.5)	r.l. (cm)
ドライブビームパワー	280	kW
うち標的熱化	53	kW
うち陽電子変換	39	kW
標的接線速度	360	m/s

度以下で運転をおこなってもただちに損傷が生じないことは IPPAK 実験により明らかであるが、金属疲労を生じ、運転が不可能となるまでの MTBF(Mean Time Between Failure) は明らかではない。一定の MTBF を確保しつつ可能な限り低い運転速度を追求するのは今後の課題である。

10.2.5　Undulator 方式による ILC 陽電子源

基本レイアウト

アンジュレーター方式においては前述のように 100GeV を超える高エネルギーの電子ビームがアンジュレーターのドライバーとして必要となる。このような高エネルギーの電子をつくるのは容易ならざることであり、この方式による陽電子生成の最大の困難である。幸いなことに ILC の場合はコライダービームとしてすでに 250GeV という高エネルギーの電子ビームが存在するので、これを物理実験だけでなく、陽電子生成のためのドライバービームとして使用するという方法が考えられる。アンジュレーターによる陽電子生成のアイデアは最初にソビエト連邦の VLEPP 計画 [73] により提案された。その後、ドイツの DESY 研究所を中心とした TESLA 計画 [74][58] に採用された。

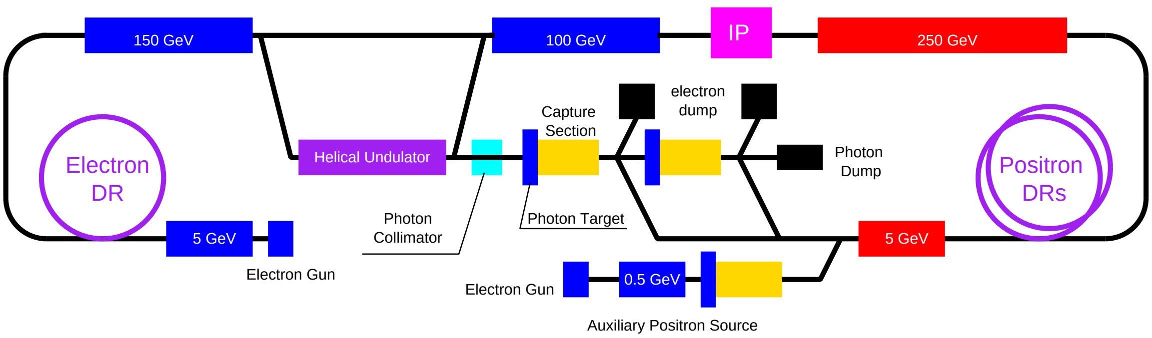


図 10.14　図はアンジュレーター方式をベースとした ILC の陽電子源を表している。

アンジュレーター方式の場合、システムの依存性（電子ビームが陽電子ビーム生成に必要）が生じるため、システム設計をより慎重に行う必要がある。当初の案では物理実験のための衝突点通過後の電子ビームをアンジュレータードライバーとしていたが、その後のスタディの進展のなかで、衝突点を通過するさいにうけるビームビーム相互作用により電子ビームの広がりが増大し、アンジュレーター通過に問題が生じることが明かとなってきた。衝突点通過前の電子ビームをアンジュレーターに通すことは様々なビーム不安定性によるビームエミッタンスの悪化とそれによるルミノシティの劣化の可能性があるが、現在までのスタディによればビームの制御を慎重に行えばビーム劣化は問題とはならない。より現実的な条件による研究が必要であるが、ILC における衝突を維持できるほどのビーム制御の技術

があれば、アンジュレーターの通過は問題ではないだろう、というのが大方の意見である。これはアンジュレーターでの制御が容易である、というよりは衝突点におけるビームの制御がより困難である、ということである。

この時点でアンジュレーターは衝突点の手前に置かれる、ということが決ったわけである。衝突点でのエネルギーは 250GeV であるから、その手前、実際は加速セクションと最終収束系の間に挿入するというレイアウトがまず思い浮ぶが、このレイアウトは低エネルギーにおける運転に支障を来す。物理からの要請では重心系の衝突エネルギーにして 90GeV から 500GeV までの領域で運転が可能なことが条件となっている。90GeV での運転は Z 共鳴における検出器の校正、および GiGa-Z モード運転[*1]から必要とされている。この状態で ILC を運転した場合、アンジュレーターでの通過電子エネルギーは 45GeV となり、ガンマ線エネルギーはかろうじて電子陽電子対生成のしきい値エネルギーを超えるものの、反応断面積はコンプトン散乱が支配的であるので、陽電子の生成は極端に低下する。

これを回避する方法はいくつか考えられる。一つはパルス毎に電子のエネルギーを変えるもので、例えばあるパルスでは衝突用に 45GeV まで電子を加速し、次のパルスは陽電子生成用に 250GeV まで加速する、という方法である。この方法ではしかし実質的にルミノシティは半減するのに加え、陽電子生成のためにだけ高エネルギーの電子を加速することになり、運転効率上よろしくない。そこで現在では図 10.14 で示されているようにアンジュレーターの位置を加速エネルギーにして 150GeV の位置に置くこととしてる。この場合、陽電子の生成は常に 150GeV の電子ビームにより行われる。150GeV 以上かつ 250GeV を下回るエネルギーで衝突を行う場合、後段の加速セクションの一部の運転を停止することにより陽電子生成に影響を与えずにおこなうことができる。150GeV を下回るエネルギーでの衝突の場合は 150GeV まで加速した電子で陽電子を生成した後、後半の加速セクションの一部または全部を減速位相で運転することにより低エネルギーを実現する。後半の加速セクションは 100GeV の加速能力があるから、全てを減速位相で運転した場合、衝突点でのビームエネルギーは 50GeV とすることができる。前段の加速エネルギーを 145GeV に少し減らせば問題の 45GeV での衝突も実現可能である。

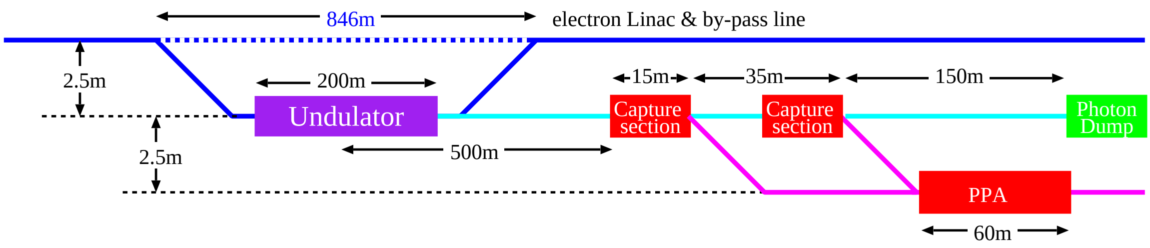


図 10.15　アンジュレーター方式 ILC 陽電子源の主要コンポーネントの配置の様子。電子エネルギー 150GeV の地点に 846m の非加速挿入領域をつくる。そこにシケイン電子軌道をつくり、電子をアンジュレーターへと導く。アンジュレーターのための空間として 200m を確保する。その空間中心から 500m 下流に標的を始めとする陽電子生成および捕獲セクションを配置する。PPA(Positron Pre-Accelertor) は陽電子の前置加速セクションであり、陽電子を 400MeV まで加速して、陽電子側まで輸送する。

図 10.15 は陽電子生成部のレイアウトを表している。アンジュレーターの配置には電子の取り回しなどにより複数の方法が考えられるが、現在のところシケインタイプが仮定されている。アンジュレーターのために 200m の空間をあけているが、実際に挿入されるアンジュレーターの長さは 100m である。これは陽電子ビームで偏極を得るにはアンジュレーターを延長する必要があり、その変更をみこんで延長の空間を確保しているためである。

アンジュレーターから陽電子生成標的までおよそ 500m あるが、これはアンジュレーターからのガンマ線のスポットサイズを大きくするためである。アンジュレーターからのガンマ線はおよそ $1/\gamma$ で広がるため、そのスポット半径 r_{ph} はアンジュレーターから標的までの距離を L とすると、

$$r_{ph} = \frac{L}{\gamma}, \tag{10.35}$$

[*1] 現在はオプションの一つ。

と表される。今 $\gamma = 3.0 \times 10^5$、$L = 500m$ とすると、$r_{ph} = 1.67mm$ となる。

生成標的および捕獲系からなる陽電子生成捕獲セクションは直列に二組用意されている。その理由は、この部分は恒常的に放射線レベルが高いこともあり、強く放射化されることが予測されており、故障やメンテナンスなどのさいに迅速な作業が不可能であることである。したがって故障やメンテナンスのさいは速やかに他方の生成系へと移行し、実際の修理や作業は放射能が充分に低下し作業が可能となった時点で行う、ということが考えられている。

陽電子生成捕獲セクション下流には陽電子の分離のための偏向磁石がおかれ、陽電子のみが進行方向右側へと導かれれる。直進方向にはガンマ線用のビームダンプがおかれている。予測される Photon Power は 300KW である。図には示されていないが、進行方向左側には電子用のビームダンプが設置される。電子のビームパワーは 13kW である。

Helical Undulator

アンジュレーター方式においては最も重要なのは生成ガンマ線エネルギーを高めることである。そのためには

- ドライブ電子エネルギー、E_0 を大きくすること、
- 周期長、λ_u を小さくすること、

が必要である。アンジュレーターにとっては周期長を小くすることが重要であるといえる。

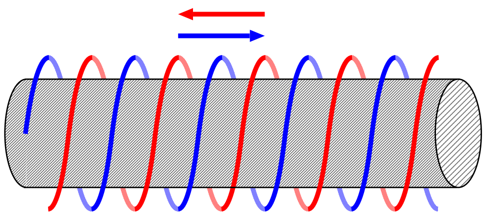


図 10.16 二つのコイルを半周期ずらして巻き付け、さらに逆方向の電流を流すことでヘリカル磁場を生成する。

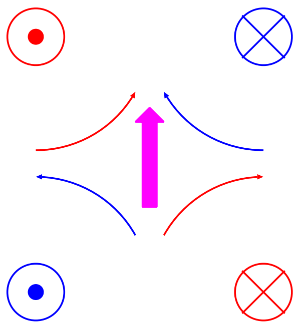


図 10.17 ヘリカルアンジュレーターの基本周期の断面図。このようにビーム軸上の任意の点はそれを囲む四つの導線により磁場がつくられる。ビーム軸方向の磁場は打ち消しあいゼロとなり、ある特定の横方向磁場のみが現れる。

ILC では超伝導コイルによりヘリカルタイプのアンジュレーターを用いる。磁場の発生には超伝導コイルを使用するが、それを螺旋（らせん）状にビームパイプに巻き付ける。このままではソレノイド磁場となるが、同様の螺旋をちょうど位相を 180 度ずらした位置にまきつけ、二つの螺旋が交互にまきついた状態をつくる。そしてこれらのコイルに逆向きの電流を流すと、軸方向の磁場成分は各々のコイルによる寄与が調度キャンセルされ、ゼロとなる。横方向の磁場は位相が調度 180 度ずれていることにより強めあい、周期長 λ_u で螺旋に回転する。図 10.17 はヘリカルアンジュレーター内の断面図を表している。ある点を囲む四本の導線に図のように電流が流れることになる。各々の導線による中心部分での磁場が細い矢印で示したようになるので、左右方向（ビーム軸方向）の磁場は打ち消しあい、

上下方向（ビーム軸に垂直な成分）の磁場のみが残ることになる。このような配置がビーム軸方向に移動するにつれて回転してゆくので、結果としてビーム軸中心で横方向の回転する磁場が得られる。図 10.18 は磁場の様子を模式的に表している。理想的なヘリカルアンジュレーターの場合、軸上磁場は次のように表される。

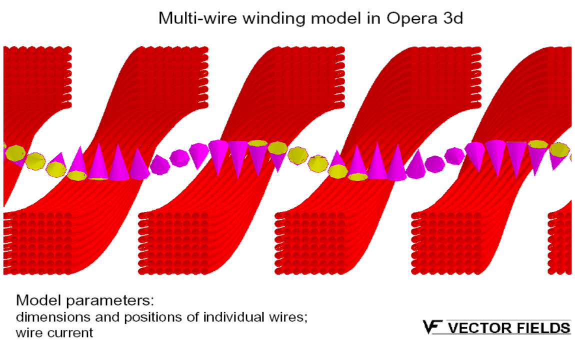


図 10.18　ヘリカルアンジュレーター内の磁場の様子。中央に並んでいる三角錘の方向が中心軸上の磁場の向きを表している。パイプの束はコイルを流れる電流をモデル化したもの。

$$B_x = B_0 \cos\left(\frac{2\pi s}{\lambda_u}\right), \tag{10.36}$$

$$B_y = B_0 \sin\left(\frac{2\pi s}{\lambda_u}\right), \tag{10.37}$$

ここで x 方向と y 方向で対称な磁場を仮定している。この磁場に電子を通すと電子は磁場により偏向されるが、偏向方向が螺旋に変化するため電子も螺旋に運動する。この時、横方向の電子速度は次のように変化する。

$$\beta_x = \frac{K}{\gamma}\cos\left(\frac{2\pi s}{\lambda_u}\right), \tag{10.38}$$

$$\beta_y = \frac{K}{\gamma}\sin\left(\frac{2\pi s}{\lambda_u}\right), \tag{10.39}$$

$$\tag{10.40}$$

ここで K は強度パラメーターで、ヘリカルアンジュレーターの場合も

$$K = \frac{B_0}{mc}\frac{\lambda_u}{2\pi}, \tag{10.41}$$

と与えられる。この時、平面アンジュレーターの場合と同様に長手方向の速度 β_s は光速よりも遅くなるが、運動が x 軸と y 軸方向の双方に生じるため遅延が大きくなり

$$\beta_s \sim 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{2\beta\gamma^2} \tag{10.42}$$

となる。これに干渉条件を適用すると放射波長として

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2}\left(1 + K^2 + \theta^2\gamma^2\right), \tag{10.43}$$

を得る。この時円偏光パラメーター P_3 は

$$P_3 = \frac{2B_0^2}{B_0^2 + B_0^2} = 1, \tag{10.44}$$

となり、純粋に円偏光した光子が得られることになる。実際には放射角度にしたがい偏極方向が変化するので、偏光ガンマ線を得るには特定の放射方向、あるいはエネルギー選択をして、特定の偏光状態のみを選び出す必要がある。

表 10.3　ILC 陽電子源に使用するアンジュレーターの基本パラメーター。無偏極の場合を想定した値。偏極する場合は実質的に生成数が減少するために、アンジュレーター長を伸ばし、ガンマ線数を増加させる必要がある。

項目	数値	単位
周期長 λ_u	1.0	cm
K パラメーター	1.0	-
コイル電流値	205	A
軸上磁場	0.85	T
アンジュレーター長	100(200)	m
ガンマエネルギー (n=1)	10.7	MeV
放射パワー	147	kW
バンチあたりガンマ線数	3E+12(6E+12)	個数
エネルギー減少	3(5)	GeV
エネルギー広がり (150 GeV)	0.15	%

ヘリカルアンジュレーターから得られる光子数はモードあたりの積分値で [76]

$$\frac{dN}{dL} = \frac{4}{3}\frac{\pi\alpha}{\lambda_u}\frac{K^2}{1+K^2} \tag{10.45}$$

となる。すなわちパワーではなく光子数でみると、そのフラックスは周期長と K 値のみにより決定される。これはアンジュレーターの長さあたりの放射パワーは電子ビームの二乗にスケールして変化するのに対して、放出される光子あたりのエネルギーも電子エネルギーの二乗に比例するため、光子数でみるとそれらの依存性が打ち消し合いエネルギーに依存しないという事実を表している。この式に $K = 1$、$\lambda_u = 1cm$ を代入すると、光子数は 0.015/cm となる。アンジュレーター長を 100m とすると、電子一個あたりの光子数は 150 個となる。したがって、2.0×10^{10}electron/bunch のバンチあたり光子数は 3.0×10^{12} 個となる。実際には高次のハーモニクスによる寄与があるので、この値よりも光子数は若干増加する。

ILC のアンジュレーターのパラメーターを表 10.3 にまとめてある。

生成標的と捕獲システム

図 10.19 は標的周りの配置を模式的に表したものである。生成標的において重要なことは陽電子生成効率を高めること、そして集中する熱負荷に対して耐えられることである。アンジュレーター方式の場合、電子シャワーの成長がほとんど起らないので、標的が厚くなるに従い距離あたりの陽電子生成数は指数関数的に減少する。また、発生した陽電子は標的中を進む間に捕獲されてしまうので、得られる陽電子数は厚さあたりの陽電子生成数にほぼ近い値となる。従って比較的薄い標的を用いるのが効率的である。陽電子生成標的には Ti-6% Al-4% V 合金を用いる。この合金は平均の原子番号は小さいので陽電子生成の効率は若干下るが、熱伝導特性が W 等に比べて良く、熱負荷によるダメージに対して強いことが予測される。厚さ 1.4cm、$0.4X_0$ 相当である。これを接線速度 100 m/s で回転させることにより熱負荷を低減し、金属疲労等のダメージを抑制する。標的の大きさは半径 1m。接線速度 100m/s を実現するため、この標的を 1000rpm で回転させる。

後述するように、この標的は 6T という強い磁場の中で回転する必要がある。磁場中で運動する導体にはその磁場変化を抑制するように渦電流 (Eddy Curret) が流れ、それによる発熱や、さらにその電流と磁場の相互作用による応力が発生し、回転運動の抑制や不安定性などの問題が生じる。計算によると円板型の標的を用いた場合、W.Stein らの計算によると [77] この渦電流により標的中に 2MW というビームによる発熱を十倍以上上回る大きな消費電力が発生すると予想される。そこで、回転標的を陽電子生成部分に必要な 5cm の幅のホイール状にし、回転標的の物質量を減少させることにより、この効果を抑制する。再び、W. Stein らの計算によると、この変更により消費電力は 20kW

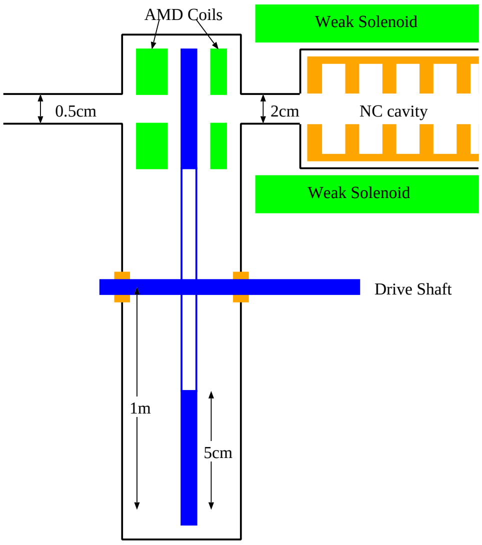


図 10.19　陽電子生成標的まわりの配置の模式図。ガンマ線は左より入射する。この配置図では AMD として超伝導 DC ソレノイドコイルを仮定している。上流のコイルが強い磁場をつくり、そのテイル部が標的下流部に AMD 磁場を形成する。

以下となり、ビームによる熱発生とほぼ等しいレベルにまで抑制される。

このリムホイールデザインにおいて、発生する応力は $3 \times 10^7 Pa$、予測される最大温度上昇は 411K となる。ビームにより発生するピーク応力は $4 \times 10^8 Pa$ となる。放射線損傷から予測される標的の寿命は連続した ILC の運転を仮定すると、およそ一年となる。従って一年毎に標的を交換する必要がある。また、高速で回転する機構となることから、機械的な故障などの可能性も高い。このような場合、いわゆるメンテナンスが必要となるが、陽電子標的を始めとする陽電子生成捕獲セクションの各部は恒常的な放射線損失が生じており、物質自身が放射化され放射能が高い状態になっている。TESLA のスタディによると [58] 運転停止後においても、100mSV/h 以下に標的まわりの放射線レベルを下げることは困難である。この値は人間が直接アクセスして作業するレベルを超えており、自動化によるリモートメンテナンスが必要となる。

現在技術的な設計作業が進行中であるが、まず全体的な冗長性を高めるために陽電子生成捕獲セクションそのものをシリーズに二つ設け、何らかの故障や不具合が発生した場合に速やかに運転をスイッチする。この冗長性により、そのメンテナンスがリモート化されていない、予想されていない部分での故障により、長期の運転停止という事態をさけるものが可能と思われる。また単独ステーションの設計思想としては、強く放射化される部分はターゲットであるため、標的のメンテナンス、すなわち交換を完全に自動化する。使用済標的はホットセルと呼ばれる放射線的に遮蔽された空間に保管され、他の部分の作業でアクセスする場合でも被曝量をできる限り軽減するようにする。また、設計作業においては、他の比較的放射化が強いと予測される AMD を構成する下流側のコイル、初段の加速空洞などについても、メンテナンスを自動化するべく、作業を続けている。

生成標的はアンジュレーターから 500m 下流に設置される。アンジュレーターからの放射光は角度にして $1gamma$ の範囲にひろがるので、標的上のスポットサイズはおよそ 1.5mm(rms) となる。ガンマ線のビームパワーはおよそ 300KW、そのうちの 18 kW が標的中でエネルギーを失い、熱負荷となると予想される。

AMD の仕様はピーク磁場 $\mathrm{B_i} = 6.0\mathrm{T}$、最終磁場 $\mathrm{B_f} = 0.5\mathrm{T}$ である。AMD を実装するためのデバイスとして、従来は Flux Concentrator が用いられてきた。しかし ILC においては 6 T の強いピーク磁場を 0.9ms という、従来の常伝導加速器に比べて極めて長い間維持する必要がある。Flux Concentrator には一次コイルにパルス的に電流を流し、内部の二次コイルに誘起される渦電流が二次コイルの内部につくる磁場を用いるタイプと、螺旋状のコイルに直接電流を流すタイプがあるが、双方とも長いパルスでの運転の実績はなく、さらにシミュレーションによると強い自

己応力に銅でできた導体が耐えられずに機械的に破壊される可能性が非常に高いとされている。

そこで、ILC では AMD を実装するためのデバイスとして、超伝導コイルによる強いソレノイド磁場の端部を用いる。超伝導コイルは連続的に磁場が励起される。その端部磁場は磁束が外に広がるにつれて磁束密度が低下し、軸上磁場もそれにつれて低下する。その下流に弱い一定のソレノイド磁場を発生する電磁石を設置し、スムーズに接続するような配置とする。

この場合、陽電子生成標的が強い磁場中を回転することになる。磁場中を金属が移動するとその磁場を抑制するように渦電流が発生し、その電流と磁場の相互作用により動きを妨げるような力をうける。標的を回転させる側からみると、常にブレーキをかけられているような、抵抗をうけることになる。この力に打ち勝つためには回転トルクを充分大きくする必要がある。またこの力は磁場のある部分だけ存在するため、回転運動に非対称な力がかかることで、波打ち運動のような複雑なモードの不安定な運動が生じて、思わぬ場所に力がかかり、金属疲労などの破壊が生じる可能性もある。

このため、回転標的の物質量をへらし、渦電流による力を軽減するために、実際にガンマ線を生成する部分にのみ W-Re 合金をホイール状に配置し、そのホイールをスポークで支える構造が考えられている。

低磁場領域には常伝導の加速ユニットが配置され、陽電子の軌道をある大きさに維持しながら加速し、相対的な横方向の運動量を抑制することでビームとして整形する。初段の加速勾配として 12MV/m 程度、後段の加速勾配として 15MV/m 程度が予定されている。陽電子の捕獲率をあげるため、開口径の大きい L-Band 加速管を用いる。常伝導加速ユニットが使用されているのは、捕獲のためにソレノイド磁場をかける必要があり、超伝導加速管は磁場との共存が困難なことと、捕獲されなかった陽電子や電子が空洞壁に衝突することによる熱発生が予測されるため、超伝導空洞の使用が困難であるのが理由である。

10.2.6 Compton 方式による ILC 陽電子源

基本コンセプト

ILC において Compton 方式をベースとした陽電子源を実現するにおいては、いくつかの課題をあげることができるが、最大のものはバンチあたり 3.2nC という高い密度の陽電子を生成することである。前にも述べたように、比較的高いガンマ線エネルギーを実現できるところがコンプトン方式の利点であるが、収量を上げるのが困難なところが欠点である。ILC においてはその高いバンチ電荷を 300ns 間隔で 0.9ms という長いパルスにわたり供給しなくてはならない。

そのため、従来の単独レーザーパルスと単独電子ビームの衝突というコンセプトを進化させ、高繰り返しモードロックレーザーとマルチバンチ電子ビームの連続衝突により、ILC のビーム構造をつくることを目指す。これにより ILC のようなマクロパルス構造（大きなパルスの中に複数のマイクロパルス＝バンチがある構造）にも対応した陽電子生成が可能となる。

さらに電子とレーザーの再利用を加えたものが、ILC の陽電子源のためのガンマ線ドライバーのコンセプトとなる。電子とレーザーの再利用は資源の有効利用（例えば省電力）だけでなく、一回のコンプトン散乱における電子およびレーザーの密度の向上にも大きく寄与する。コンプトン方式の弱点は生成数の少なさであるから、この再利用というコンセプトはこの方式の成功の鍵を握るといえる。電子のとレーザーの再利用は電子蓄積リングと光学空洞をにより実現される。

光学重畳空洞とレーザー

光学空洞とは、ファブリペローに代表される複数のミラーを組合せることにより境界条件を満すような波長とモードのレーザーを蓄積する装置である。モードロックレーザーを蓄積する場合、一般的な境界条件に加えて、空洞内の往復の光路長が正確にモードロック周期と同期している必要がある。この条件が成立している場合、後から来たパルスは正確に蓄積パルスに重なりあい、重なり合ったパルス数だけレーザーが増幅される。また蓄積パルスの往復する

二つのグループが、空洞中央でちょうどゆきあうことになり、そこでさらに二倍の増幅が得られる。これをパルス重畳（Pulse Stacking) と呼び、単なる光蓄積とは区別している。往復する二つのパルス群が重なり合う空洞の中央に電子ビームを通し、衝突点とすることでより光子密度を大幅に向上させることができる。

コンプトン散乱の確率を向上させるにはレーザーパワーだけでなく、空洞中央部でなるべく細くレーザーを絞ることが必要となる。単純な二つの双曲線ミラーを用いたファブリペロー型空洞の場合、共振器長 L をミラーの焦点距離 f の二倍、すなわち $L = 2f$ とすることでウエストサイズは最小化される。一方、特定のモードが空洞内に蓄積される条件は $L > 2f$ であり、これが満されないと光の境界条件が破れて、空洞から光がもれだしてしまい、光蓄積は不可能となる。従ってウエストを細くするには $L > 2f$ という条件を満しつつ、$L = 2f$ の状態に限界まで近づくことが要求される。従ってウエストを細く絞る蓄積空洞を実現するにはミラーの工作精度、位置制御など限界ぎりぎりまで向上させる必要がある。さらにこれにパルス重畳の条件が加わるため、精度の要求は非常に厳しいものになる。

二つのミラーで空洞を形成する場合の条件をまとめると

$$L = n\frac{\lambda}{2} \tag{10.46}$$

$$L = mT_{ml}c \tag{10.47}$$

$$T_{ml} = T_{325MHz} \tag{10.48}$$

となる。式 10.46 はレーザー光が蓄積される波長の調和条件であり、式 10.47 のモードロックの重畳の条件が満されていれば、自動的に満される。式 10.48 はモードロック周期とビームとの同期条件である。ビームをマスター周期とすれば、これよりモードロックの周期および空洞長が自動的に決定される。従って空洞長を調整する余地はない。

この空洞長のもとで、$L < 2f$ という条件のもとで、$L = 2f$ になるべく近付けるにはミラーの焦点距離で調整する以外にない。すなわち一旦ミラーを作ってしまえば、位置などのオペレーションにおける制御によってこれらの条件の整合をとることが不可能である。これはシステム上、非常に厳しい条件である。

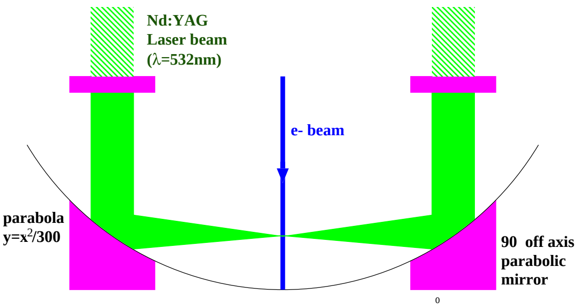


図 10.20　四枚のミラーによる光重畳空洞の例。中央の二つの双曲線ミラーにより中央に焦点が作られる。ウエストサイズはこの二つのミラー間距離によって制御される。重畳の条件である空洞長の制御は二つの平面ミラー位置により独立に行われる。

これを緩和する一つの方法はミラーの枚数を増やすことである。例えば図 10.20 のようにミラーの枚数を四枚として光学空洞を構成した場合、下側の双曲線ミラーの曲率と距離でウエストサイズを制御する一方、上側の平面ミラーの位置により空洞長を独立に制御できることになる。したがって工作精度が誤差をもっていたとしても、それをこれらのミラーの位置制御により合せこむことが可能となる。しかしミラーの枚数を増やすと反射の損失による増倍度の減少、また自由度の増加による制御の複雑化などが課題となる。

重畳空洞については、現在までのところ、357MHz のモードロックレーザーとファブリペロー型空洞を用いて、増倍係数 230 倍が実証されている [78]。また、KEK-ATF において、この空洞とビームとの衝突角 90 度でのガンマ線発生実験も行われ、限られたスケールではあるが、この方法によるガンマ線の生成とその収量の向上が実証されている [79]。

レーザーシステムは三つのステージからなる。Nd:YAG のモードロックレーザー、CPA によるレーザー増幅系、そして重畳空洞によるパワーの増倍である。Nd:YAG モードロックレーザーは Nd:YAG レーザーを構成する光学空洞内に周期的に屈折率を変化させるデバイスを挿入し、これを外部から所定の周期でドライブすることにより複数のモードを発生させる。モードロック周期は 325MHz、ミクロパルス長は 7ps、パルスあたりのエネルギーは 170nJ、平均出力は 55W である。

増幅は CPA(Chirped Pulse Amplifier) により行う。CPA は結晶中にシグナル光とポンプ光を導入し、結晶中の非線形相互作用を媒介としてポンプ光からシグナル光へとエネルギーを移動させることでシグナル光の増幅を行う技術である。従来のレーザー媒質を媒介とした誘導放出による増幅に比べて、ポンプ光からシグナル光へのエネルギーの輸送効率が高く、それゆえにパワー密度の限界が高いという利点がある。その一方、増幅の結晶軸の角度依存性が大きく、調整に非常に高い精度が要求されるので、安定的な運転には特別の配慮が必要となる。ここでは Nd:YAG の二倍波 (532nm) をポンプ光とし、パルスあたりのエネルギーを 6mJ まで増幅する。

このパルスを光学重畳空洞へと導入し、100 パルス分を重ね合わせることで空洞内で 600mJ のエネルギーを実現する。

Compton Ring

電子ビームは周回軌道内にコンプトン散乱の衝突点をつくることで再利用される。このリングを Compton Ring, CR と呼ぶ。原理的には CR と DR は同じサイズとすることも可能であるが、建設コスト等を考慮すると、より小さいリングであることが望ましい。コンセプト設計では周長を 1/10 と仮定している。この場合、CR 内のビーム構造を 10 個並べたものが正確に DR 内でのビーム構造となっていなくてはならない。従って周長が正確に 1/10 であるだけでなく、DR におけるバンチの詰め方のパターンが正確に 10 周期を持っている必要がある。DR の周長がおよそ 6.6km であるから、コンプトンリングの周長はおよそ 660m となる。

コンプトンリングの一部にレーザーと電子がコンプトン散乱をおこなうための衝突点をもうける。この衝突点の数は必要なガンマ線数と一回の衝突における生成数により決定される。衝突点を複数もうけた場合も、ガンマ線は通過する電子ビームにより生じるから、各々の衝突点で生成されたガンマ線は時間的に自動的に同期される。コンプトンリング内をバンチ間隔 6.16ns 毎に電子ビームを周回させ、その通過と同期してレーザーを光学空洞内に入射してやることにより、コンプトン散乱が衝突点で生じ、電子ビームが衝突点セクションを一回通過するたびに 23.2 から 29MeV のエネルギー領域に 1.39×10^{10} 個のガンマ線が生成される。コンプトンリングとレーザーのパラメーターを表 10.4 にまとめてある。

コンプトンリングの課題は 10.0nC という高密度ビームを衝突点において横方向 $25 \times 5\mu m$、長手方向 $5mm$ という小さいビームサイズを実現しつつ安定して周回させることにある。さらにコンプトン散乱により電子ビームは周回毎にエネルギーを失うため、これによりビーム自身が失われないような広いエネルギーの許容値を持たなければならない。コンプトン散乱により失われるエネルギーは一周あたり 11.2MeV[60] であるが、シンクロトロン放射によるエネルギー損失は 11.7 keV であるから、エネルギーロスはコンプトン散乱によるものが支配的となる。このような大きなエネルギー損失が周回毎にある場合、定常的なビーム状態を保つことは非常に困難である。

そこでビームが非定常である状態、すなわちコンプトン散乱が生じている間はビーム状態が徐々に変化してゆくことを前提としてコンプトンリングは設計された。これを steadey-state regime に対してパルスモードと呼ぶ。このモードにおける基本コンセプトは周回毎にコンプトン散乱により失われるエネルギーと加速空洞により供給されるエネルギーをバランスさせることにある。シンクロトロン周波数を極めて低く設定し、レーザーとの衝突のパルス長である 170μs よりも充分に周期が長くなるようにしたばあい、シンクロトロン振動は無視できるので、電子は一定の加速を常に受けつづけることになる。この初期加速位相をコンプトン散乱より電子が失う平均的なエネルギーと等しくおくことで、コンプトン散乱によりエネルギーを失っても、電子のエネルギーは平均的に不変となる。

しかし一方でコンプトン散乱はランダム事象なので、ビームのエネルギー広がりは徐々に大きくなり、それによる

表 10.4　コンプトンリングおよびレーザーシステムのパラメーター。文献 [60] より YAG レーザーをベースとした場合のパラメーターを抜粋し修正したもの。衝突点の数は空洞によるレーザーの増倍係数を 100 と仮定した場合。

項目	数値	単位
電子ビームエネルギー	1.3	GeV
バンチあたり電荷	10.0	nC
RF 周波数	650	MHz
水平ビームサイズ	25	μm
垂直ビームサイズ	5	μm
バンチ長	5	mm
Laser 波長	1064	nm
Laser ウエストサイズ	5	μm
Laser パルス長	0.9	mm
Laser power	592	mJ
衝突点の数	30	個
衝突角度	8	度

ビームサイズの広がりによりガンマ線の収量は徐々に低下する。図 10.21 は電子が衝突セクションを通過するさいに生成されるガンマ線量を周回数の関数として表したシミュレーションの結果である。この結果によると、生成量は周回電子あたり 1.6 から 0.5 近くまで変化しているのがわかる。平均の生成量は 0.94 である。このようにパルスモードでは生成量が周回とともに変化するが、後述するようにここで生成されたガンマ線は陽電子に変換され、DR において重畳される。すなわち最終的に得られる陽電子数の生成量のバンチ毎のばらつきは 10 周ごとに区切った区間の中における変化量の平均となる。コンプトンリング設計の詳細については文献 [80] を参照のこと。

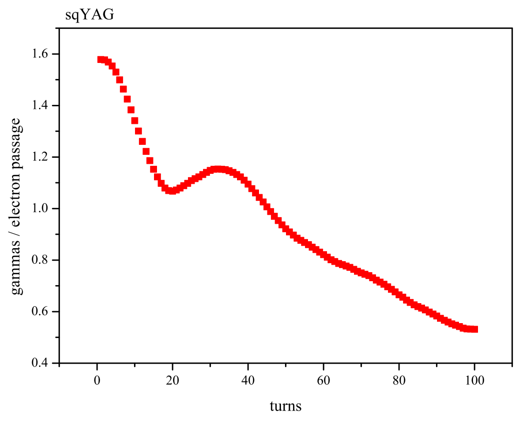


図 10.21　ガンマ線の周回毎の電子あたりの生成量の変化。

コンプトンリングには 6.16ns 毎に 280 個の電子ビームバンチが周回する。このコンプトンリングを電子が 100 周する間、レーザーを入射しガンマ線の生成を行う。この 1 レーザーバーストの結果、6.16ns 間隔で 28000 個のガンマ線のトレインが発生する。[*2] このガンマ線を生成標的に入射させ、陽電子を生成する。生成標的はアンジュレーター方

[*2] 現実には 28000 のバンチは連続しているわけではなく、複数のミニトレインからなるが、具体的なトレイン構造は問題ではない。ここでは DR のビームパターンが 10 周期を持っていることと、それを CR のビームパターンがコピーしていることが重要である。

式と同様に 1 放射長以下の薄い標的を使用する。生成効率を考慮し、得られる陽電子数はバンチあたりおよそ 2×10^8 となる。このビームを初段の常伝導加速空洞、および続く超伝導加速空洞によりおよそ 5GeV まで加速する。ビームのマクロパルス長は $28000\times 6.1/1000 = 171\mu s$ 、平均ビーム電流はバンチ電荷がおよそ 0.039nC であるから 6.4mA となる。アンジュレーター方式での陽電子初段加速ではパルス長 0.9ms、平均電流 10mA のマクロパルスであるから、コンプトン方式のほうがパルス長がおよそ 1/5、平均電流にして六割と負荷が軽減されている。ビーム負荷が小さいので空洞への結合を小くすることで、ほぼ同じシステムを使用することが可能となる。

次にこの陽電子ビームを DR へと入射する。この 28000 バンチを含むマクロパルスは DR のビームパターンの調度 10 周分となっているので、入射を始めてから 2801 バンチ目で 1 バンチ目とおなじ RF バケツに入射することになる。この時、DR の RF バケツの縦方向の空間を利用することにより前に入射されたバンチと干渉せずに次のバンチを入射する。Zimmermann のシミュレーションによると、この方法により同一バケツへの 10 バンチの入射が可能である [60] 。図 10.22 はこの複数バンチ入射の様子を縦方向位相空間でみたものである。各図の横軸は縦方向位置、縦軸はエネルギーの相対値である。(b) は十周目の入射後の状態で、最初の 5 バンチはすでにシンクロトロン振動により位相空間での移動が始まっている。１バケツあたり 10 バンチ、すなわち 1 レーザーバーストからのバンチを全て

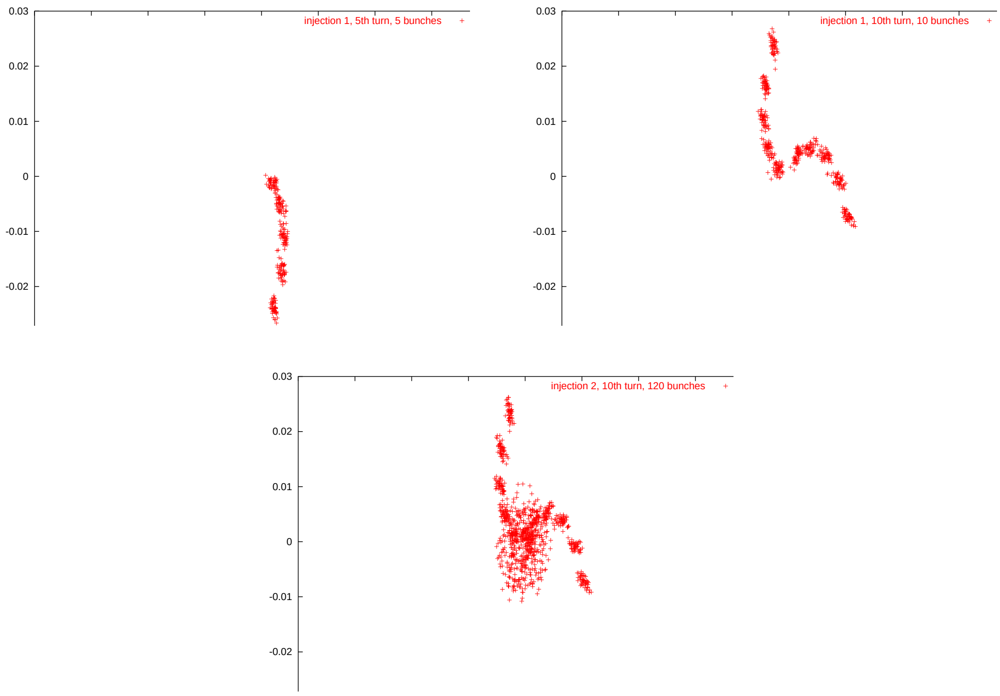


図 10.22　縦方向位相空間における複数バンチ入射の様子。(a) 5 番目のバンチ入射後 (b) 10 番目のバンチ入射後 (c) 20 番目のバンチ入射後。

入射した後は、次のレーザーバーストまで 10ms の時間がある。DR の放射ダンピングによる減衰時間は 10ms なので、位相空間において広がっていた 10 バンチのビームはその頃にはシンクロトロン振動の平衡位置に収束している。図 10.22 （c) は二回目のレーザーバーストからのバンチ、合計で 20 バンチ入射後の様子で、中央付近のかたまりが最初の 10 バンチが収束したものである。従って次の十バンチを同様の方法で入射することが可能となるのである。

以上のように同一のバケツへの 10 バンチ入射を、ビーム収束のため 10ms の間隔をあけて、10 回繰り返すことで、合計で 100 バンチが同一バケツへ入射される。この時点でバケツあたりの陽電子数は $2\times 10^{1}0$ となっている。ライナックへのビーム供給は 5Hz、すなわち 200ms ごとであるから、以上のプロセスに 100ms 使用したとしても、DR における 100ms の減衰時間が残されていることになる。10 ダンピング時間はエミッタンスの桁数にして-20 乗であ

るから、エミッタンス平衡に到達するには十分である。

コンプトン方式のパラメーターを表 10.5 にまとめる。

表 10.5　コンプトン方式による陽電子生成パラメーター。[60] から抜粋したものを修正。

項目	数値	単位
DR 周長	6646	m
DR 内 バンチ数	2800	個
1 バンチあたり入射陽電子数	2.4×10^8	個
1 レーザーパルスあたり		
同一バケツへの入射回数	10	回
レーザーパルス繰り返し	10 (100)	回 (Hz)
最終のバンチあたり陽電子数	2.4×10^{10}	個
DR 減衰時間	10	ms

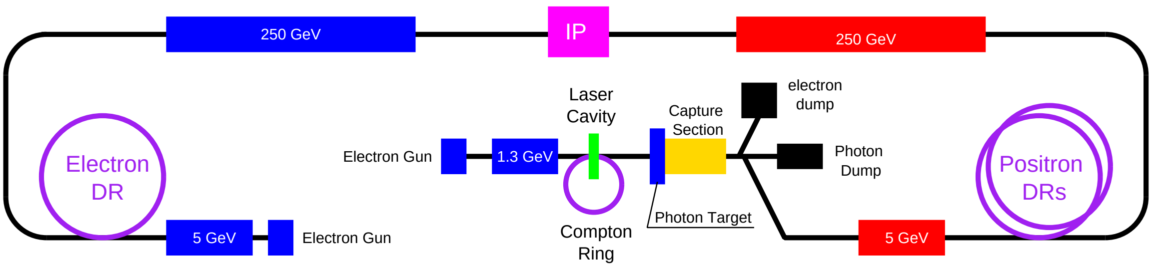


図 10.23　コンプトン方式をベースとした場合の ILC のレイアウト概要。CR は DR の正確に 1/10 の周長をもつ蓄積リングである。

図 10.23 にコンプトン方式を採用した場合の ILC の概略図を示す。コンプトン方式を採用した場合のシステム上の最大の利点はアンジュレーター方式の場合に問題となる電子側とのシステム依存性が除かれる点である。このため、電子ビームのトラブルに起因する復旧時間の増大による陽電子の供給率の低下の問題が解消される。これによりアンジュレーター方式の場合必要となった電子ビーム駆動方式によるバックアップ陽電子源が不要となる。

また、アンジュレーター方式の場合は、陽電子はアンジュレーター下流で生成されるので、この陽電子を陽電子側まで輸送しなければならない。この輸送経路の長さは 20km 以上におよび、トンネルを一部共用するにしても、コスト的に無視できない。コンプトン方式においてはこのような輸送路は必要ない。

それに対してコンプトン方式の場合の制限としては、既に述べたように DR のバンチパターンおよび取り出し方式において、完全な 10 周期が存在することと、Step Solution でなければならない点があげられる。また周長が 1/10 とはいえ、独立したリングが必要なこともコストの増加要因となる。

10.3　おわりに

19 世紀は化学の世紀、20 世紀は物理の世紀と呼ばれている．20 世紀には量子力学や相対性理論などが生まれ，また原子核 · 素粒子物理, 固体物理が劇的に発展し，それまでの古典的な物理観、物質観に大きな変化がみられた．我々が生きる 21 世紀はどのような時代になるのであろうか．19 世紀の時点でこの 20 世紀の大きな変化を見通せた人はいないであろう．それと同様に、今の時点でこれからの来るべき時代を見通すのは困難である．しかし何らかの兆候は見えているはずである．

古典物理学全体にわたり数々の業績をあげた William Thomson, Lord Kelvin は 19 世紀最後の年である 1900 年に「光と熱の物理を覆う 19 世紀の雲 (Nineteenth-Century Clouds over the Dynamical Theory of Heat and Light)」と題した有名な講演を行い、マイケルソンモーリーの干渉実験と黒体輻射を当時の物理学がうまく説明できないことを述べ、そこに物理学が挑むべき課題があることを示した. 19 世紀後半には古典物理学はその圧倒的な成功により完成された体系とみなされ、「物理学にやるべきことはもう残されていない」とまでいわれていた. そのような状況で 20 世紀の物理学の発展を見通したのかのような Thomson の卓見は見事であるが、逆に言えば常に新しい物理の影は微かではあるが、見えているということだ.

それはマイケルソンモーリーの干渉実験のように、壮大な宇宙の構造を明らかにしようとする観測や実験の中にあるかもしれないし、黒体輻射のように、製鉄技術向上のため、温度計では測れない溶鉱炉の中の温度を正確に知りたい、という至極実用的な動機から始まった研究の中にあるかもしれない. 重要なのは、今までの体系の中からはみ出すような事実を見つけること. それを見落とさないことである. それはいままで誰も気づかなかったくらいだから、非常にわかりにくく、小さな破れだろう. その小さな破れを大きくして発見するためには、既存の体系の階層構造を飛び越えるような現象を生じさせ、それを精密に調べることが有力な手段である、と 20 世紀の物理学の発展は教えている. エネルギー、ビーム密度、パワーの向上はたんに量的な変化だけではなく、いままで未知だった領域への扉を開き、パラダイム転換へと繋がる可能性も秘めているのである. 本稿が学生諸氏に対して、未知の領域への冒険心と興味を掻き立てるものであったならば幸いである. まだ蛇の頭と尻尾は繋がっていない.

.1 WKB 近似

WKB 近似とは Wentzel-Krammers-Brillouin の頭文字をとったもので, 任意の形状のポテンシャル中での粒子の運動を量子力学的に記述するために考案された方法である. Schrödinger は波動方程式であり, かなり限定された形状のポテンシャルについてしか厳密解をもとめることはできない. WKB 近似では以下に示すように波動関数の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を含む空間振動を示す関数 $S(\boldsymbol{r})$ が滑らかに変化するという仮定のもとで方程式の近似解を求める. ここでは簡単のため一次元系を考えるが, 三次元系においても本質的な議論は変わらない. 時間を含まない Scrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x), \tag{49}$$

の解として次の形のものを仮定する.

$$\psi(x)=\psi_0 exp\left[\frac{\imath}{\hbar}S(x)\right], \tag{50}$$

これを式 (49) に代入すると,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{\imath}{\hbar}\right)^2(S')^2+\left(\frac{\imath}{\hbar}\right)S''\right]\psi+V\psi=E\psi, \tag{51}$$

を得る. 両辺を $\psi(x)\neq 0$ として両辺を除して, 整理すると次式を得る.

$$(S')^2-\imath\hbar S''=2m\left[E-V\right]. \tag{52}$$

この式から $S(x)$ が $-\imath\hbar$ の冪乗で展開することによって方程式が単純化できることが示唆される. 展開の妥当性にはとりあえず目をつぶるとして, $S(x)$ をためしに次のように展開してみる.

$$S(x)=S_0(x)+(-\imath\hbar)S_1(x)+(-\imath\hbar)^2S_2(x)+\cdots=\sum(-\imath\hbar)^nS_n(x) \tag{53}$$

これを式 (52) に代入し, $\hbar$ についての恒等条件をとると

$$(S_0')^2=2m(E-V), \tag{54}$$

$$(-\imath\hbar)2S_0'S_1'+(-\imath\hbar)S_0''=0, \tag{55}$$

$$(-\imath\hbar)^2S_0S_2'+(-\imath\hbar)^2(S_1')^2+(-\imath\hbar)^2S_1''=0, \tag{56}$$

等を得る. 式 (54) の平方根をとると,

$$S_0' = \pm\sqrt{2m(E-V)} = \pm p(x), \tag{57}$$

となり, 局所的な波動関数の運動量を与える. さらにこれを x について積分すると以下を得る.

$$S_0(x) = \pm \int_{x_0}^{x} p(x')dx', \tag{58}$$

ここで x_0 は $S_0(x)$ の初期値, すなわち波動関数の位相因子を与えるものであり, 位相を考えなければ任意に与えられる量である. また, 式 (55) から次式を得る.

$$S_1' = -\frac{S_0''}{2S_0'} = -\frac{p'}{2p}, \tag{59}$$

ここで p は式 (57) で与えた局所的な運動量である. この両辺を積分すると,

$$S_1 = -\frac{1}{2}\ln p(x), \tag{60}$$

と S_1 が求められる. このように次々と $\hbar$ についての展開式における恒等条件から, 順次 S_n を求めることができる.

ここまでで求めた S_1 までの項で近似すると, 求める波動関数は以下のように記述される.

$$\psi(x) = \exp\left[\frac{\imath}{\hbar}(S_0(x) - \imath\hbar S_1(x))\right], \tag{61}$$

$$= \exp\left[\pm\frac{\imath}{\hbar} int_{x_0}^{x} p(x')dx' - \frac{1}{2}\ln p(x)\right], \tag{62}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left[\pm\int_{x_0}^{x} p(x')dx'\right], \tag{63}$$

例として, WKB 近似によるトンネル確率を求めてみよう. 領域 I と領域 III においてポテンシャル $V=0$, 電子のエネルギー E とし, $0<x<a$ の領域 II において有限のポテンシャル $V(x)>E$ を持つとしよう. 上の結果から, 領域 II における波動関数は

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left[\pm\frac{1}{\hbar}\int_0^x p(x')dx'\right], \tag{64}$$

とおける. ここで

$$p(x) = \frac{\sqrt(2m(V(x)-E))}{\hbar} \tag{65}$$

である. 今, 負の方向から電子がやってくるものとしよう. この時波動関数の成分としては符号の正負二つが存在するのであるが, 正の成分は伝搬するにつれて振幅が増大する解であるから, 物理的に妥当ではない. そこで負号のみの解を採用する.

領域 I および III では $p_0=\sqrt{2mE}$ であるから, 振幅を含めて各々の領域での波動関数は下のように置ける.

$$\psi_I(x) = C_1\exp\left(\frac{\imath}{\hbar}p_0x\right) + C_2\exp\left(-\frac{\imath}{\hbar}p_0x\right), \tag{66}$$

$$\psi_{II}(x) = \frac{C_3}{\sqrt{p(x)}}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^x p(x')dx'\right], \tag{67}$$

$$\psi_{III}(x) = C_4\exp\left(\frac{\imath}{\hbar}p_0x\right), \tag{68}$$

ここで C_1 は入射波の振幅, C_2 は反射波の振幅, C_3 および C_4 はいずれも領域 II および II における透過波の振幅である. これらの振幅は $x=0$ および $x=a$ における境界条件から導くことができるが, ここで数学的な困難がひとつある. 区間 II と III の間における連続かつ滑らかな解析接続を境界条件として課すと, 振幅が一意に決まってしま

い，　透過確率を計算することができない．そこでポテンシャルの出口に関しては連続であるという条件のみを要求し, 滑らかという条件を要求しないことにする．まず $x = 0$ における境界条件から

$$C_1 + C_2 = \frac{C_3}{\sqrt{p(0)}}, \tag{69}$$

$$\frac{\imath p_0}{\hbar}C_1 - \frac{\imath p_0}{\hbar}C_2 = -\frac{\sqrt{p(0)}C_3}{\hbar}, \tag{70}$$

という式が得られる．ここで WKB 近似領域における導関数において

$$\frac{d\psi_{II}}{dx} \sim \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left(-\frac{p(x)}{\hbar}\right)\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^x p(x')dx'\right], \tag{71}$$

という近似を用いている．また $x = a$ における連続の条件から

$$\frac{C_3}{\sqrt{p(a)}}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^a p(x')dx'\right] = C_4\exp\left(\imath\frac{p_0}{\hbar}b\right), \tag{72}$$

が得られる．これらの三つの式から C_2 および C_3 を消去すると次式を得る．

$$\left(\frac{C_4}{C_1}\right)^2 = \frac{4}{(1+|p(0)|/|p_0|)^2}\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_0^a p(x')dx'\right]. \tag{73}$$

ここで, 右辺の頭の分数は $V(0) \sim 2E$ 程度のポテンシャルを仮定すると 1 になるので, 透過確率は

$$T \sim \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_0^a p(x')dx'\right], \tag{74}$$

と与えられる．これが WKB 近似による任意のポテンシャルによる透過確率の値である．

参考文献

[1] J. Primack and N. Abrams,“http://www.viewfromthecenter.com”

[2] 亀井亨、木原元央著、パリティ物理学コース「加速器科学」(1993).

[3] 平田光司、岩波講座「加速器とビームの物理」(2002).

[4] “http://accwww2.kek.jp/oho/”.

[5] “http://cas. web. cern.ch/cas”

[6] E. Courant and H. Snyder, Annals of Physcs 281(2000).

[7] 北垣敏男, fermilab report, february (1980).

[8] “http://www.slac.stanford.edu/”.

[9] “http://tesla.desy.de/ rasmus/media/Accelerator_physics/slides/Livingston_Plot2.html”

[10] Symmetry magazine, October (2009).

[11] H. Wiedemann, Particle Accelerator II, Springer (1995).

[12] M. Tigner, Nuovo Cimento 37(1965) 1228.

[13] CERN-LEP/84-01, LEP Design Report (1984).

[14] SLC Design Handbook, SLC Report (1984).

[15] Abridged Description of Tristan Electron Positron Colliding-Beam Machine, KEK Report (1981).

[16] International Linear Collider, Technical Design Report, ISBN 978-3-935702-74-4 (2013).

[17] 日本学術会議答申,“http://www.scj.go.jp/ja/info/kohyo/pdf/kohyo-22-k178-1.pdf” (2013).

[18] 竹田誠之，リニアックの基礎、大穂 90 テキスト (1990).

[19] H. Wiedemann, “Particle Accelerator Physics”, Springer, 1998

[20] ILC Reference Design Report,ILC-Report-2007-001, 2007

[21] T. Suwada et al., Nucl. Instr. Meth. A 557, pp131, 2006

[22] 柴田幸男著,「電子管・超高周波デバイス」, コロナ社, 1983 年

[23] A. Yamamoto et al., “The Research on the Carbon Nano Tube Cathode”, Proceedings of 2003 Particle Accelerator Conference, pp3326-3328, 2003

[24] X. Chang et al., ‘Measurement of the Secondary Emission Yield of a Thin Diamond Window in Transmission Mode’, Proceedings of Particle Accelerator Conference 2005, pp2251-2253, 2005

[25] S.A.Cherenshchikov, A.N.Dovbnya, and A.N.Opanasenko, “Secondary Emission in Cold-cathode Magnetron Injection Gun”,Proceedings of PAC95, pp939-941, 1995

[26] A. W. Chao, M. Tigner 編, “Handbook of accelerator physics and engineering”, World scientific, 1998

[27] 日本学術振興会編,「電子・イオンビームハンドブック」日刊工業新聞社, 1973 年

[28] T. Srinvasan-Rao et al.,”Photoemission studies on metals using picosecond ultraviolet laser pulses”, J. Appl. Phys. 69(5), pp3291-3296, 1991

[29] C. Travier, “An introduction to photo-injector design”, Nuclear Instruments and Methods in Physics research A 340 (1994) 26-39pp.

[30] H. J. Qian, J. B. Murphy, Y. Shen, C. X. Tang, and X.J. Wang, “Surface photoemission in a high-brightness electron beam radio frequency gun, Appl. Phys. Lett. 97(2010)253504

[31] E. Shefer, A. Breskin, A. Buzulutskov, R. Chechik, M. Klin, M. Prager, “Laboratory production of efficient alkali-antimonide photocathodes”, Nucl. Instr. and Meht. A 411(1998) 383-388

[32] E. Shefer, A. Breskin, A. Buzulutskov, R. Chechik, and M. Prager, “Composite photocathodes for visible photon imaging with gaseous photomultipliers”, Nucl. Instr. and Meth. A 419 (1998) 612-616

[33] E. Shefer, A. Breskin, A. Buzulutskov, R. Chechik, and M. Prager, “Coated photocathodes for visible photon imaging with gaseous photomultipliers”, Nucl. Instr. and Meth. A 433 (1999) 502-506

[34] T. Nakanishi et al.,”Polarized electron source for a linear collider in Japan”, NIMA 455, p109-112, 2000

[35] 松岡正浩, ” 量子光学”, 裳華房, 2000

[36] ジェフ ヘクト, “出力のポンプアップ”, Laser Focus World Japan, pp45-47, October, 2005

[37] W. Riedle, ”Sub-20-fs pulses tunable across the visible from a blue-pumped single-pass noncollinear parametric converter”, Opt. Lett. 22 No. 19, 1997

[38] M.Reiser,”Theory and Design of Charged Particle Beams”, Wiley-Interscience Publicatiom Editor John Wiley & Sons, Inc.

[39] J.Luiten, “How to realize uniform 3-dimensional ellipsoidal electron bunches”, Phys.Rev.Letters, 2004

[40] 富澤宏光他, “RF 電子銃用光源レーザーパルスの 3 次元形状制御による電子ビームの自動低エミッタンス化”, 第三回加速器学会年会, WO16, 2006

[41] 大沢哲, 「電子銃」, 大穂 90 テキスト

[42] Kwang-Je Kim, “RF and space charge effects in laser driven RF electron gun”,Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A275 201-218,1989

[43] D. J. Gibson et al.,”Electron beam and RF characterization of a high brightness X-band photoinjector”, Proceedings of the 2001 PAC, p2245-2247, 2001

[44] D. T. Palmer et al., “Emittance studies of the BNL/SLAC/UCLA 1.6 cell photocathode RF gun”, Proceedings of the 1997 PAC, p2687-2689, 1997

[45] 楊金峰 他, 「レーザーフォトカソード RF 電子銃による高品質ピコ秒電子パルスの発生」, Proceedings of 26th linear accelerator meeting in Japan, p70-72, 2001

[46] W. J. Brown et al., “Low emittance electron beam formation with a 17 GHz RF gun”, Physical review special topics-accelerator and beams, Vol 4, 083501, 2001

[47] J. W. Lewellen at al., “Emittance measurements of the advanced photon source photocathode RF gun”, Proceedings of 2001 PAC, p2215-2217, 2001

[48] S. Pastuszka et al., Appl. Phys. Lett. 71, pp2967, 1997

[49] N. Yamamoto et “Initial beam emittance measurements for electron gun with NEA-GaAs type photocathode”, 第三回加速器学会年会, TO28, 2006

[50] K. Togawa et al., “Surface charge limit in NEA superlattice photocathodes of polarized electron source”, NIMA 414, pp431-445, 1998

[51] A. V. Aleksandrov et al ,“High power test of GaAs photocathode in RF gun,”, EPAC 98 proceedings, 1450-1452, 1998

[52] http://www-project.slac.stanford.edu/ilc/
acceldev/injector/ILCPES/
2ndPolRFGunMeeting/Final.htm

[53] D. Shultz et al., ”The Polarized Electron Gun for the SLC”, Proceeding of EPAC 92, 1029-1031, 1992

[54] G. Mulhollan et al., “Photovoltage effects in photoemission from thin GaAs layers”, Phys. Lett. A282, pp309-318, 2001

[55] T. Nishitani et al., J. Appl. Phys. 97, 094907, 2005

[56] X. Jin et al.,Applied Physics Letters, **105**, 203509(2014).

[57] C. Sinclair et al., “DC photoemission electron guns as ERL sources”, NIM A 557, pp69-74,2006

[58] TESLA Technical Design Report, 2000

[59] 鈴木千尋, “偏極電子ビーム源の高性能化に向けた, 金属表面からの電界放出暗電流の発生機構と削減の研究”, 名古屋大学大学院博士論文, 2000 bibitemFFurutaT. Nakanishi et al.,”An Electrode with Molybdenum-cathode and Titaniumanode to minimize field emission dark currents”, Proceedings of LINAC 2004, pp645-647, 2004

[60] S. Araki et al. “Compton based ILC positron source”, KEK-Preprint, 2005

[61] T. Kamitani, “陽電子源”, 大穂 2002

[62] V. Bharadwaj, “Status of Existing Positron Sources”, presented in Workshop on Positron Sources for ILC, Daresbury, UK, 2005

[63] J. A. Clarke, “The Science and Technology of Undulators and Wigglers”, Oxford Science Publications, 2004

[64] The newest information of E166 can be found at the collaboration web page, http://www.slac.stanford.edu/exp/e166/.

[65] T. Omori et al.,“Design of a polarized positron source for linear colliders”, NIMA Vol 500, Pages 232-252, 2003

[66] F. Zimmermann, et al.,”CLIC Polrized Positron Source Based on Laser Compton Scattering”, Proceedings of EPAC06, 2006

[67] T. Omori et al.,”Efficient Propagation of Polarization from Laser Photons to Positrons through Compton Scattering and Electron-Positron Pair Creation”,PRL,Vol 96,11480, 2006

[68] M. Fukuda, et al., “Polarimetry of Short-Pulse Gamma Rays Produced through Inverse Compton Scattering of Circularly Polarized Laser Beams”,PRL 91(16),164801, 2003

[69] T.Naito et al., “Development of the Fast Kicker System for ILC”, 第三回加速器学会年会報告集, FP17, 2006

[70] M. Kuriki, K. Kubo, H. Ehrlichmann, S. Guiducci, and A. Wolski,“Timing Constraints on ILC”, 第三回加速器学会年会報告集、FP15,2006

[71] S. Ecklund, SLAC-CN-128

[72] M. Kuriki, T. Mimashi, K. Saito, M. Kikuchi, and T. Kamitani, “A Damage Test for ILC Positron Generation Target at KEKB”, Phys. Rev. ST Accel. Beams 9, 071001, 2006

[73] V. E. Balakin and A. A. Mikhailichenko, “Coversion System for Obtaining Highly Polarized Electrons and Positrons at High Energy”,Budker INP 79-85, 1979

[74] K. Floettmann,”Investigations Toward the Development fo Polarized and Unpolarized High Intensity Positron Sources for Linear Colliders”,DESY 93-161,1993

[75] ILC-GDE GG3 report, ILC-WS at Snowmass, Colorado, US, 2005

[76] SLAC-PUB 10842,2004

[77] I. Bailey, “EUROTEV Photon Conversion Target Project”presented at POSIPOL 2006, CERN, Geneva, 2006

[78] M.Nomura, K.Hirano, M.Takano, S.Araki, Y.Higashi, T.Taniguchi, J.Urakawa, Y.Yamazaki, Y.Honda, N.Sasao, K.Takezawa, H.Sakai, ”Enhancement of Laser Power from a Mode Lock Laser with an Optical Cavity” , p.2637-2639, Proceedings of EPAC 2004, Lucerne, Switzerland.

[79] K. Takezawa, Master thesis, Univ. of Kyoto, 2005

[80] E. Bulyak, P. Gladkikh, V. Skomorokhov, "Synchrotron Dynamics in Compton X-Ray Ring with Nonlinear Compaction", in arXiv p. 5 physics/0505204v1 (2005)

[81] P. Yu and M. Cardona, "Fundamentals of Semiconductors", Springer (2001)

[82] S.H. Kong, D.C. Nguyen, R.L. Sheffield, B.A. Sherwood, "Fabrication and characterization of cesium telluride photocathodes: A promising electron source for the Los Alamos Advanced FEL", Nucl. Instr. and Meth. A 358 (1995) 276-279