令和５年度　修士論文

# 位相空間回転によるSTFでの高ルミノシティビーム生成のための実験的研究

広島大学先進理工系科学研究科

量子物質科学プログラム

伊達 圭祐

担当教員　栗木 雅夫

## 要旨

本研究は、国際リニアコライダー（ILC）計画をはじめとするリニアコライダー計画において高ルミノシティを実現するために必要となる超低エミッタンス、高アスペクト比の電子ビーム生成をビームの位相空間における操作で実現しようとするものである。これによりリニアコライダーのルミノシティ向上、建設コスト低減などにつながる。粒子の運動量と位置によって定義される 6 次元位相空間は体積を変えずにその形状を変化させることができるため、その性質を利用して必要なビームの生成を行う。ILC の要求値は規格化エミッタンスで$\varepsilon_x$=10.0μm、$\varepsilon_y$=0.04μm という値になっており、y 方向のエミッタンスが x 方向のエミッタンスに比べ極めて小さい。また z 方向の制限は極めて緩い。本研究では位相空間回転におけるビームの生成について、高エネルギー加速器研究機構（KEK）の超伝導リニアック試験施設（STF）を想定したシミュレーションによる研究を行った。

本論文では 1 章では加速器についてその変遷や特徴、研究背景について説明する。2 章ではビームダイナミクスと位相空間回転技術（RFBT）について説明する。3 章、 4 章では STF での実験についてまとめる。5 章、6 章で実験の再現や改善に向けたシミュレーションを示し、7 章でシミュレーション結果を考察する。 8 章に本研究のまとめを記す。

# 目次

# 1　序論

## 1-1　加速器の変遷と特徴

本章では加速器の変遷と特徴について参考文献【1】に従って説明する。

加速器は素粒子や原子核のエネルギーを外部的に増大させることで粒子を高速に加速する装置である。高エネルギー状態の粒子を曲げた際に発生する放射光を利用したり、粒子同士を衝突させることで、標的物質の微細構造や高エネルギー領域の現象を観測することが可能である。素粒子物理学、医療、産業、材料研究など多岐にわたる分野で重要な役割を果たしており、現代科学の中心的な技術の一つとなっている。

加速器の歴史は静電型加速器から始まった。粒子に一定の電場をかけることで加速させる原理を用いた Van-de-Graaf 型や Cockcroft-Walton 型などがその代表である。このタイプの加速器は、発生できる電圧によりそのエネルギーが制限され、また放電による絶縁破壊により高い電圧をかけることが難しく、加速エネルギー10MeV 程度が限界であり、比較的低エネルギー領域で主に使用されている。この制約を克服するために、時間的に変動する電場による繰り返し加速が可能な高周波加速器（RF 加速器）が開発された。高周波加速は、時間的に変化する電場を粒子に与え、高周波電場に粒子を繰り返し通過させる共鳴加速の原理に基づいている。これによって高エネルギーまでの加速が可能となった。現代の高エネルギー加速器はほぼすべてこの方法を採用している。

加速器には Synchrotron や Cyclotron など、粒子が円形軌道を周回しながら加速される円形加速器と、加速空洞を直線状に配置する線形加速器がある。円形加速器では等時性の破れや、発生できる磁場によりその最大エネルギーが制限される。また、特に電子などの小さい質量を持つ粒子では、曲げられる際に発生するシンクロトロン放射によるエネルギー損失がそのエネルギーを制限する。線形加速器では、等時性、磁場の強さ、シンクロトロン放射による加速限界の制約は存在しない。加速エネルギーは加速電界と加速長の積により決定される。加速長と加速電界を高めることで、無限にエネルギーを高めることが可能である。

加速器の利用方法の一つに、粒子同士を衝突させて高エネルギー領域での物理現象を観測するものがある。この方法には、静止した標的に加速した粒子を打ち込む固定標的型と、加速した粒子同士を衝突させるコライダーの二つのアプローチがある。固定標的型は高密

度の標的に粒子を打ち込むため、反応確率が高いのが特長である。ただし、重心系が運動量を持つために、加速されたエネルギーの一部しか反応に寄与せず、エネルギー効率は極めて悪い。コライダーは異なる方向から加速されたビームを衝突させるため、実験室系＝重心系であり、かつ全運動量はゼロであり、加速されたエネルギーの全てを反応に用いることができ効率的である。与えられた加速エネルギーでより高エネルギーの現象が観測可能であり、新たな現象の発見や精密な測定が可能となる。一方で、反応確率を高めるには、高密度のビーム同士を正面衝突させるための高精度の制御が求められる。本研究は後者のコライダー型のうち、線形加速器によるリニアコライダーの高ルミノシティ化の研究である。

## 1-2　研究背景

リニアコライダーは線形加速器で構成される。前述の通りシンクロトロン放射によるエネルギー損失が無く、加速エネルギーは加速勾配と加速空洞の長さによって決まるため、原理的な加速限界は存在しない。また、リニアコライダーの建設コストは加速空洞の長さに比例するため、設計をコンパクトにすることでコストを抑えることができる。

コライダーの設計はルミノシティ(反応レートを断面積で規格化した値。単位は$m^{-2}s^{-1}$)を大きくすることにつきる。ルミノシティが大きいほど時間あたりに得られるイベント数が大きくなるため、測定の統計的な精度が増す。リニアコライダーのルミノシティは次の様にあらわされる【1】-(7.2)。

$$L = \frac{f n_b N^2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \tag{1.1}$$

ここで$f$は衝突周波数、$n_b$はパルス当たりのバンチ数、$N$はバンチ内粒子数、$\sigma_x, \sigma_y$は衝突点における横方向の RMS ビームサイズである。

この式から、ルミノシティを大きくしたければ、分子を極大化する、もしくは分母を極小化すれば良い。分子を大きくする場合、粒子数や繰り返しを増やすということは消費電力も増えるということである。リニアコライダーの運転に必要な電力は

$$P_w = 2\eta E f n_b N \tag{1.2}$$

であることから、消費電力は粒子数に比例して大きくなってしまう。消費電力を増やさずにリニアコライダーにおいてルミノシティを最大化するには、分母を極小化するしかない。分母を極小化するにはビームサイズを極めて小さく絞ればよいが、その場合は、Beamstrahlung と呼ばれる現象に注意する必要がある。Beamstrahlung とはビーム間相互作用の一つである。衝突点において、一方のビームが作る磁場によって他方のビームの軌道が曲げられ、シンクロトロン放射が誘起じ、衝突点でのエネルギー広がりを作ってしまう。Beamstrahlung によるエネルギー広がりは以下の式で表される。

$$\Delta E \propto \frac{1}{\left(\sigma_x + \sigma_y\right)^2 \sigma_z} \tag{1.3}$$

シンクロトロン放射の原因となるビームのつくる磁場は、Ampere の法則からビームを囲む領域の周長に反比例する。このエネルギー広がりによって観測したいイベントがぼやけてしまうため、コライダー実験において Beamstrahlung の影響は抑えたい。これらの制約を勘案すると、消費電力と Beamstrahlung によるエネルギー広がりを抑えながらルミノシティを高める唯一の方法は、$\sigma_x \gg \sigma_y$という条件のもとで、$\sigma_y$を極小化する、非対称な扁平ビームを用いることである。その場合、式(1.3)の分母は極小化されることなく、エネルギー広がりが抑えられ、式（1.1）の分母は極小化されてルミノシティを高めることができる。

現在日本では、電子・陽電子衝突によるヒッグス粒子の大量生成とその詳細研究、超対称性粒子やダークマターなどの未知なる素粒子の探索を目的として、国際リニアコライダーILC(International Linear Collider)の建設が計画されている。ILC の設計案では電子ビームを周長 3km の DR(Damping Ring)に蓄積し(Fig1.1)、放射減衰によって規格化エミッタンスで$\varepsilon_x$=10 mm mrad，$\varepsilon_y$=0.04 mm mrad の非対称エミッタンスビームを作り、これを線形加速器で加速して衝突点において$\sigma_x$=640 nm，$\sigma_y$ =5.7mm の扁平ビームを生成する設計である（Table1.1）。

| parameter | value | unit |
|---|---|---|
| Bunch charge | 3.2 | nC |
| RMS bunch length | 300 | μm |
| Norm x emittance | 10 | π mm.mrad |
| Norm y emittance | 0.04 | π mm.mrad |
| y beta function | 10 | mm |
| RMS x beam size | 474 | mm |
| RMS y beam size | 3.5 | nm |
| Energy loss to beamstrahlung | 1.7 | % |

Table1.1 ILC のビームパラメータ

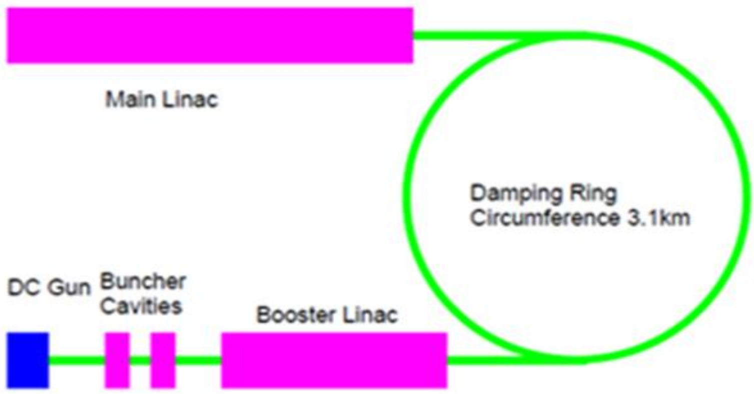


Fig1.1 ILC の概略図

我々の提案する入射部における非対称エミッタンスビーム生成が可能となれば、3km のDＲが不要となり、加速器を簡略化しコストを抑えることが可能となる。そのため、入射部に RFBT(Round to Flat Beam Transformation の略：xy エミッタンス振り分け技術)とTLEX（Transverse to Longitudinal Emittance eXchange の略：xz エミッタンス交換技術）と呼ばれるエミッタンス交換技術を組み合わせることによって、ビームを位相空間上で操作することで、所定の形状のビームを実現する。エミッタンスは位相空間でビームが張る面積もしくは体積で定義されるが、この手法では 6 次元位相空間において散逸などが無い限りエミッタンスの積は保存するため、力学的な体積を変えずに非対称エミッタンスビームを生成することが可能である。以下、参考文献【2】で紹介される各プロセスを説明する。

ビームの輸送が線形であれば、Louisville の定理が述べるように、位相空間体積は不変で

あるため、エミッタンスの積が保存されたまま振り分けが可能である。実際には空間電荷効果をはじめとする非線形効果を考える必要がある。一般に実験で使用されるビームはガウス分布であり、空間電荷効果は非線形であり x,y それぞれのエミッタンスは保存されない。一方、空間電荷効果はローレンツ $\gamma$ の 2 乗に反比例し、粒子が十分に加速されればほとんど無視できるため、空間電荷効果が顕著に働く上流部でエミッタンス増大を抑制すればよい。空間電荷効果を抑制するために初期ビームサイズを大きくとることが考えられるが、ビームサイズが大きくなるに伴って熱運動によるビームの初期エミッタンスも大きくなるため、RFBT 後の x 方向のエミッタンスは過大になる。この過大になったエミッタンスを TLEX で z 方向のエミッタンスと交換することで要求値を満たす。

初期の横方向エミッタンスが 50 mm mrad の場合、これを振り分けて、$\varepsilon_y$=0.04 mm を得るために RFBT を行うと、$\varepsilon_x$=62500 mm mrad, $\varepsilon_y$=0.04 mm mrad, $\varepsilon_z = 10$ mm mrad に振り分けられる。初期のエミッタンスの積は、50×50=2500 であり、RFBT 後のエミッタンスの積は 62500×0.04=2500 となることから RFBT 前後でエミッタンスの積が保存されていることが分かる。

次に TLEX によって RFBT 後の過大な x エミッタンスを z 方向エミッタンスと交換し、$\varepsilon_x$=10 mm mrad, $\varepsilon_y$=0.04 mm mrad を実現する。【3】

本研究ではその足掛かりとして、KEK の STF ビームラインを想定したシミュレーションで RFBT を確認し、STF で再現することを検討した。

## 2.ビームダイナミクス

本章では参考文献【2】に沿ってビームダイナミクスと位相空間回転技術である RFBT と TLEX について説明する。RFBT（Round to Flat Beam Transformation）は x-y に関するエミッタンス振り分け、TLEX（Transverse to Longitudinal Emittance eXchange）は x-z に対するエミッタンス交換を指す。

### 2-1 エミッタンス

以下、参考文献【2】1.2~3.3 に従って説明をする。

一般的に加速器物理ではビームの進行方向に曲線座標系として s 軸を設定し、s 軸の直交成分を x,y、法線成分を z と定義する(Fig2.1 参照)。ここで x,y,z は基準粒子からの相対的な座標を指しており、運動量はローレンツガンマとベータを用いて$\gamma\beta mc$で定義される。横方向運動量を進行方向の運動量で規格化したものを x’,y’で表す(x’= $\frac{\gamma\beta_x mc}{\gamma\beta mc}$ y’=$\frac{\gamma\beta_y mc}{\gamma\beta mc}$)。

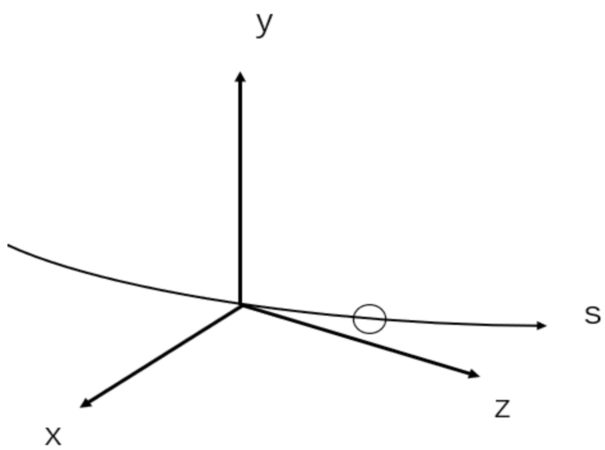


Fig2.1　加速器の座標系

ビーム内の粒子は基準粒子からの相対的な位置と個々の運動量を用いて 6 次元位相空間(x,$p_x$,y,$p_y$,z,$p_z$)上の点として表すことができる。エミッタンスとは、ビームが位相空間に占める体積(2 次元位相空間では面積)のことを指す。つまり、エミッタンスはビームの運動方向のばらつき具合を表す指標となるため、エミッタンスが小さいビームは運動の方向がそろったビームといえる。ここで x 方向のエミッタンスは以下のように定義される。

$$\varepsilon_x = \sqrt{\langle x^2\rangle\langle x'^2\rangle - \langle xx'\rangle^2} \tag{2.1}$$

〈〉は全粒子の平均であり、$\langle xx'\rangle$は$x$と$x'$の相関を表す。また x'= $\frac{p_x}{p_z}$であることから、このエミッタンスは運動量を無次元化したものである。この定義は rms エミッタンスと呼ばれる。また、本来 6 次元位相空間で定義されるエミッタンスを 2 次元空間である(x,x')に射影しているため、射影エミッタンスとも呼ばれる。粒子の六次元位相空間内の座標を以下のように列ベクトルで表す。

$$U = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

ここで$\delta$はビームの進行方向のエネルギー広がり$\varDelta E$を運動エネルギー$E$で規格化したものである（$\delta = \varDelta E/E$）。この$U$行列と、その転置行列$\widetilde{U}$を掛けて統計平均をとったものをビーム行列と定義し、次のように表す。

$$\varSigma = \langle U\widetilde{U}\rangle = \begin{pmatrix} \langle x^2\rangle & \langle xx'\rangle & \langle xy\rangle & \langle xy'\rangle & \langle xz\rangle & \langle xz'\rangle \\ \langle x'x\rangle & \langle x'^2\rangle & \langle x'y\rangle & \langle x'y'\rangle & \langle x'z\rangle & \langle x'z'\rangle \\ \langle yx\rangle & \langle yx'\rangle & \langle y^2\rangle & \langle yy'\rangle & \langle yz\rangle & \langle yz'\rangle \\ \langle y'x\rangle & \langle y'x'\rangle & \langle y'x'\rangle & \langle y'y'\rangle & \langle y'z\rangle & \langle y'z'\rangle \\ \langle zx\rangle & \langle zx'\rangle & \langle zy\rangle & \langle zy'\rangle & \langle z^2\rangle & \langle zz'\rangle \\ \langle z'x\rangle & \langle z'x'\rangle & \langle z'y\rangle & \langle z'y'\rangle & \langle z'z\rangle & \langle z'^2\rangle \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

(2.3)の行列式の平方根をとったものが 6 次元位相空間のエミッタンスに相当する。
(2.3)の対角 2×2 成分の行列式の平方根が各自由度の射影エミッタンスとなる。

$$\varepsilon_w = \begin{vmatrix} \langle w^2\rangle & \langle ww'\rangle \\ \langle w'w\rangle & \langle w'^2\rangle \end{vmatrix}^{1/2} = \sqrt{\langle w^2\rangle\langle w'^2\rangle - \langle ww'\rangle^2} \quad (w = \mathrm{x,y,z}) \tag{2.4}$$

ここで$w$ =x の場合が（2.1）に相当する。各自由度の射影エミッタンスの積は必ずしも 6 次元位相空間の行列式には一致しない。各自由度が無相関である場合、非対角成分がすべてゼロとなり、(2.3)の行列式と、各部分行列の行列式の積は一致する。

rms エミッタンスは進行方向の運動量に依存し、加速前後でエミッタンスが変化するため運動量一定の条件下でのみ保存量となる。これではエネルギーの異なるビームの比較に不都合を生じるため、ローレンツ因子$\beta = \frac{v}{c}$,  $\gamma = \sqrt{1+(\frac{P}{m_0 C})^2}$ を rms エミッタンスに掛けたものを規格化エミッタンスとして定義する。

$$\varepsilon_w = \varepsilon_{nw}\frac{mc}{P_z} \approx \frac{\varepsilon_{nx}}{\beta\gamma} \tag{2.5}$$

加速器では加速管の前後で粒子の速度が異なるため、異なる場所でのエミッタンスを比較したり、エミッタンスの推移を見る際にはこの規格化エミッタンスを使う。本論文でも特に断りがない限り規格化エミッタンスを用いる。

## 2-2 ビームの輸送

次にビームが$s_0$から$s$に移動することを考える。加速器内の粒子の横方向運動方程式は

$$w''+k(s)w=0 \tag{2.6}$$

ここで、k は収束場を表す係数で s の関数である。ここで w は x または y とする。

A(s)と B(s)が(2.6)の独立した 2 つの解であると仮定し、以下の境界条件を与える。

$$A(s_0)=B'(s_0)=1$$

$$A'(s_0)=B(s_0)=0 \tag{2.7}$$

(2.6)の任意の解は

$$w(s)=A(s)w(s_0)+B(s)w'(s_0)$$

$$w'(s)=A'(s)w'(s_0)+B'(s)w'(s_0) \tag{2.8}$$

と書くことができ、w に対して$s_0$から$s$へ移動する行列$M$は

$$M(s|s_0)=\begin{pmatrix} A(s) & B(s) \\ A'(s) & B'(s) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

で表せる。この行列$M$を輸送行列と呼ぶ。

ビーム輸送において転送前のビーム行列を$\Sigma_0$、転送後のビーム行列を$\Sigma_1$とすると次の関係性がある。

$$\Sigma_1 = M\Sigma_0\widetilde{M} \tag{2.10}$$

ここで$\widetilde{M}$は$M$の転置行列である。また、det$|M|$=1 であり、ビームの輸送前後でビーム行列の行列式は変化しないためエミッタンスは保存量となる。ここで(2.9)を用いて(2.8)は次のようになる。

$$W_{(s)} = M(s|s_0)W_{(s_0)} \tag{2.11}$$

ただし$W_{(s)}$, $W_{(s_0)}$は(2.8)を用いて、次の様に定義する。

$$W_{(s)} = \begin{pmatrix} w(s) \\ w'(s) \end{pmatrix} \qquad W_{(s_0)} = \begin{pmatrix} w(s_0) \\ w'(s_0) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

M はビームライン要素のみに依存し、M($s_n|s_0$)=M($s_n|s_{n-1}$)⋯M($s_2|s_1$)M($s_1|s_0$)と書けるので、実数 k について

(k>0 のとき)転送行列は

$$M(s_1|s_0)=\begin{pmatrix} cos\varphi & \frac{sin\varphi}{\sqrt{k}} \\ -\sqrt{k}sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi=(s_1-s_0)\sqrt{k} \tag{2.13}$$

(k<0 のとき)転送行列は

$$M(s_1|s_0) = \begin{pmatrix} cosh\varphi & \frac{sinh\varphi}{\sqrt{k}} \\ -\sqrt{k}sinh\varphi & cosh\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi = (s_1 - s_0)\sqrt{k} \tag{2.14}$$

と表せる。

（k=0 のとき）ドリフト空間(外力の働いていない)を表し、

$$M(s|s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

と書ける。21 成分と 22 成分がそれぞれ 0 と 1 であることから、ドリフト空間ではビームの運動量は変化せず、位置だけ変化することが分かる。このように輸送行列は加速器の構成によって異なる。例えば四重極磁石（quadrupole）では磁極長 $\ell$ 、 強度(k>0)の場合、焦点距離$f$が $\ell$ に比べて十分大きいとすると、thin-lens 近似と長さ L のドリフトを用いて

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -{}^{1}/_{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad -{}^{1}/_{f} = k\,\ell \tag{2.15}$$

と書ける。

ここでハミルトニアンの運動方程式$q_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$　$P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ に初期値$q_{i0}, P_{i0}$を与え、時刻$t$を考慮した解$q_i = q_i(q_{i0}, P_{i0}, t)$ ，$P_i = P_i(q_{i0}, P_{i0}, t)$について 6×6 転送行列$M_6$を記述すると次の様になる。

$$M_6 = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial q_{10}} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial q_{30}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_{10}} & \cdots & \frac{\partial P_3}{\partial q_{30}} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

上式は$\widetilde{M_6} J_6 M_6 = J_6$を満たし、$J_6$はシンプレティック行列であり単位シンプレティック行列$J$を用いて

$$J_6 = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

と表せる。

同様に 4 次元位相空間$(x, P_x, y, P_y)$について、$P = \sqrt{{P_x}^2 + {P_y}^2 + {P_z}^2}$とするとき 4×4 転送行

列$M_4$は次の様に書ける。

$$M_4 = \boldsymbol{P}^{-1} M_4 \boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

上式は$\widetilde{M_4} J_4 M_4 = J_4$を満たし、$J_4$はシンプレティック行列であり単位シンプレティック行列$J$を用いて

$$J_4 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

と表せる。このことから$M$はシンプレティック行列で、$|M|$=1 の場合、ビーム輸送によってΣ行列の行列式は不変であり、エミッタンスは保存されることが分かる。

## 2-3 RFBT（x-y エミッタンス分配）

RFBT とは Round to Flat Beam Transformation の略であり、位相空間分布を制御することで$\varepsilon_x$と$\varepsilon_y$の積を保存しながら、その振り分けを行う技術であり、$\varepsilon_x \gg \varepsilon_y$の扁平ビームを生成することが可能だ（参考文献【2】)。ソレノイド磁場中で電子ビームを生成すると、角運動量をもつため、ビーム行列の非対角成分が出現し、見かけのエミッタンス増大を起こす。この角運動量をもったビームを、Skew Quadrupole（通常の quadrupole を 45 度傾けたもの）3 つに通すことで、自由度間の相関を取り除くことが可能であるが、結果として xy 間に非対称エミッタンスが生まれる。

扁平ビームが生成される過程を位相空間上の粒子の動きを表したモデルを用いて説明する。Fig. 2.2 は x-y 平面における粒子の位置と、運動量（矢印）を表している。(a)はソレノイド磁場中で生成された状態、(b)は適当な強さの skewQ 磁石を通過した状態である。

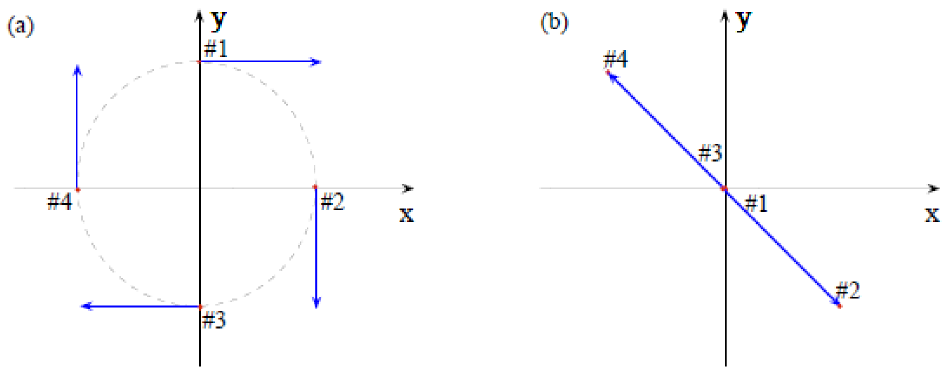


Fig2.2　扁平ビームが生成される様子【2】から引用

この位相空間での座標$U$を次の様に定義する。

$$U = \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \\ y_i \\ y'_i \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

ここで、i は a または b であり、Fig2.2(a)(b)に対応する。

(a)は角運動量支配下での粒子の様子であり、#1~#4 の粒子の座標は次の様になる。

$$U_{1,a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_{2,a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_{3,a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_{4,a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

(y,y')が 90 度回転するような輸送行列$M$は次の様になる。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

式(2.10)を用いて、(a)のビームに対してこの輸送行列を施すと、粒子は(b)に移る。

$$U_{1,b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_{2,b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_{3,b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_{4,b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

(b)をみると、(a)の点線の円上にあったすべての粒子は次の様に変化していることが分かる。

$$\begin{gathered} x_b = a\cos\theta = x_a \\ y_b = -a\sin\left(\theta + {}^{\pi}\!/_{2}\right) = y_a \end{gathered} \tag{2.24}$$

$a$は円の半径であり、（このモデルの場合は$a=\sqrt{2}$)、$\theta$ はx軸との角度を表している。粒子が(a)から(b)に移ることで、角運動量支配下の円形ビームが斜めに一直線に分布することが分かる。ビームを水平に一直線に分布させたい場合($\varepsilon_x \gg \varepsilon_y$の扁平ビーム)は、輸送行列を45度回転させればよく、この役割を果たすのがSkew Quadrupoleである。

ここからは、角運動量を持ったビームを SkewQuadrupole に通すことで扁平ビームが生成される過程をビーム行列を用いて【2】に沿って説明する。

横方向空間の粒子座標を2つのベクトルで表す。

$$X=\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

これに対応する4×4ビーム行列は次の様に書ける。

$$\Sigma=\begin{pmatrix} \langle X\tilde{X}\rangle & \langle X\tilde{Y}\rangle \\ \langle Y\tilde{X}\rangle & \langle Y\tilde{Y}\rangle \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Rを4×4回転行列として、単位行列$I$を用いて表すと

$$R=\begin{pmatrix} Icos\theta & Isin\theta \\ -Isin\theta & Icos\theta \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

ビームが回転対称ならば、回転についてビーム行列は不変であるため

$$\Sigma=R\Sigma R^{-1} \tag{2.28}$$

(2.26),(2.27)を(2.28)に代入して

$$\langle X\tilde{X}\rangle cos^2\theta+\langle Y\tilde{Y}\rangle sin^2\theta+\left(\langle X\tilde{Y}\rangle+\langle Y\tilde{X}\rangle\right)sin\theta cos\theta=\langle X\tilde{X}\rangle \tag{2.29}$$

が成立する。$\theta$は任意であることから(2.29)より、次の2つの関係が得られる。

$$\langle X\tilde{X}\rangle=\langle Y\tilde{Y}\rangle \tag{2.30}$$

$$\langle X\tilde{Y}\rangle+\langle Y\tilde{X}\rangle=0 \Leftrightarrow \langle X\tilde{Y}\rangle=-\langle Y\tilde{X}\rangle \tag{2.31}$$

ここで(2.30),(2.31)の転置をとると

$$\langle\widetilde{\langle X\tilde{Y}\rangle}\rangle=-\langle\widetilde{\langle Y\tilde{X}\rangle}\rangle=-\langle X\tilde{Y}\rangle \tag{2.32}$$

が成立する。従って$\langle X\tilde{Y}\rangle$は反対称行列で、シンプレティック単位行列$J$を用いて

$$\langle X\tilde{Y}\rangle = \mathcal{L}J \tag{2.33}$$

と書ける。

$\mathcal{L}$は角運動量$L$と縦方向運動量$p_z$に関する定数であり、次の様に定義される。

$$\mathcal{L} = \langle xy'\rangle = -\langle x'y\rangle = \frac{L}{2p_z} \tag{2.34}$$

つまり(2.33)の左辺成分は粒子の角運動量を表している。

ここで、Fig2.3 に示すような位相空間で粒子が囲まれている楕円を考えてみる。

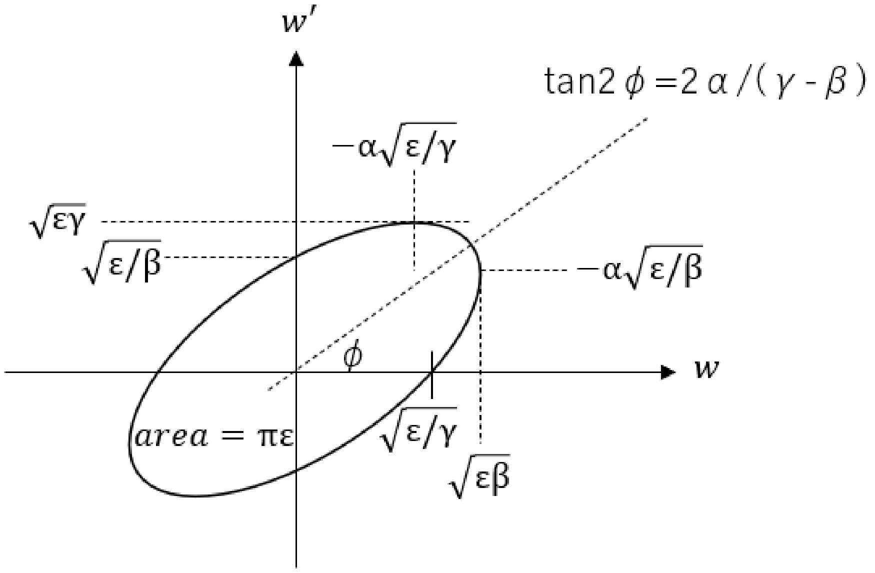


Fig2.3　位相空間で粒子が占める楕円

この楕円は以下の式で表される【8】。

$$\gamma w^2 + 2\alpha ww' + \beta {w'}^2 = \varepsilon \tag{2.35}$$

ここで$\alpha, \beta, \gamma$は Twiss パラメータと呼ばれ、Twiss パラメータによって楕円の形が変わってくる。 ε は熱エミッタンスに相当し、粒子の初期状態によって決まる。楕円の面積は輸送行列の行列式が 1 であれば不変であ ε も不変である。この楕円の面積$S$は次の様に表される。

$$S = \int dwdw' = \pi\sqrt{|\sigma|} = \pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} = \pi\varepsilon \tag{2.36}$$

ここで $\sigma$ は行列式が$\varepsilon^2$のビーム行列で、次の様に定義される。

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

また、$\gamma = (1+\alpha^2)/\beta$ であり、Twiss パラメータに関して次の関係が成り立つ。

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1 \tag{2.38}$$

(2.36),(2.37),(2.38)からビーム行列は次の様に書き直すことができる。

$$\sigma = \varepsilon\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

従って、(2.30)は次の様に表される。

$$\langle X\tilde{X}\rangle = \langle Y\tilde{Y}\rangle = \varepsilon T_0 \tag{2.40}$$

ここで$T_0$は Twiss Parameter $\alpha$ , $\beta$ を用いて

$$T_0 = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \frac{1+\alpha^2}{\beta} \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

但し$|T_0| = 1$である。(2.41)と(2.33)から、一般的な円筒対称で角運動量をもつ 4×4 ビーム行列は

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon T_0 & \mathcal{L}\mathrm{J} \\ -\mathcal{L}\mathrm{J} & \varepsilon T_0 \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

と書ける。よって $M$をシンプレティックな転送行列とすると転送後のビーム行列は(2.10)から

$$\Sigma = M\Sigma_0\widetilde{M} \tag{2.43}$$

となるので、(2.43)からシンプレティック変換に関する以下の 2 つの不変量$I_1, I_2$が確認されている参考文献【3】。$I_1, I_2$は次のとおりである。

$$I_1 = \varepsilon_{4D} = \sqrt{|\Sigma|} \tag{2.44}$$

$$I_2(\Sigma) = \frac{-1}{2}T_r(J_4\Sigma J_4\Sigma) \tag{2.45}$$

ここで、転送行列 M によって転送されたビーム行列の対角成分のみが残るとき

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_- T_- & 0 \\ 0 & \varepsilon_+ T_+ \end{pmatrix} \quad ただし\ T_\pm = \begin{pmatrix} \beta_\pm & -\alpha_\pm \\ -\alpha_\pm & \dfrac{1+\alpha_\pm}{\beta_\pm} \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

となる。ここで(2.44)を(2.43)に適用すると

$$\sqrt{|\Sigma|} = \sqrt{|\Sigma_0|} \Rightarrow \varepsilon_+ \varepsilon_- = \varepsilon^2 - \mathcal{L}^2 \tag{2.47}$$

が得られる。また$JT_{0,\pm}JT_{0,\pm} = -I$より

$$J_4 \Sigma_0 J_4 \Sigma_0 = \begin{pmatrix} -(\varepsilon^2 + \mathcal{L}^2)I & 0 \\ 0 & -(\varepsilon^2 + \mathcal{L}^2)I \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

$$J_4 \Sigma J_4 \Sigma = \begin{pmatrix} -\varepsilon_-^2 I & 0 \\ 0 & -\varepsilon_+^2 I \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

と求められる。これと(2.45)から$I_2$は次の様に書き直すことができる。

$$I_2(\Sigma) = I_2(\Sigma_0) = \varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 = 2(\varepsilon^2 + \mathcal{L}^2) \tag{2.50}$$

ここで、(2.47),(2.50)から

$$\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm \mathcal{L} \tag{2.51}$$

こうして角運動量支配下でのビーム輸送によって非対称エミッタンスが生じ、各自由度のエミッタンスの大きさは、熱エミッタンス$\varepsilon$と角運動量$\mathcal{L}$によって決まる。

ソレノイドによる扁平ビームを生成する場合を考える。RFBT に必要となる基本的なビームラインを Fig2.4 に示す。ソレノイド磁場中のカソードから$\Sigma_0$のビーム行列を生成し、Skew Quadrupole 3 つを使って非対角成分を対角成分に分配する。

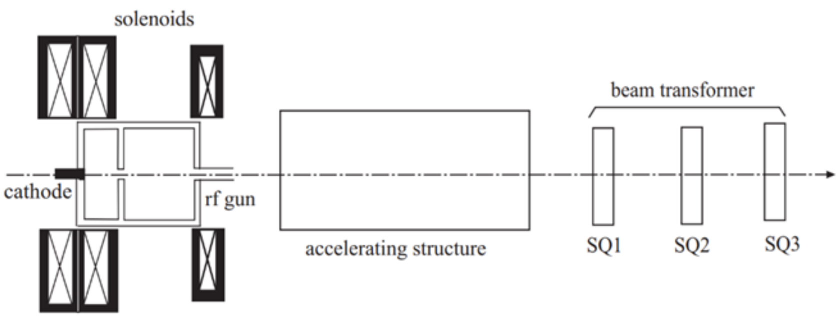


Fig2.4　RFBT の基本構成【2】から引用

カソード表面での電子の座標は(2.25)と同じ。また、$B_c$をカソード上での縦方向磁束密度とする。Solenoid 出口では$B_z = 0$であり、カソード出口までの輸送でビームが受ける運動量成分の変化$\Delta x', \Delta y'$は次の式で与えられる。

$$\Delta x' = -ky \qquad \Delta y' = kx \tag{2.52}$$

但し$k = \frac{eB_c}{2P_z}$である。これによりカソード出口でのビーム行列は次の様に書ける。

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' - ky \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' + kx \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

カソード表面に相関モーメントがない（$\langle xx' \rangle = \langle xy \rangle = \cdots = 0$）と仮定すると、ビーム行列は

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & k\sigma^2 \\ 0 & k^2\sigma^2 + \sigma'^2 & -k\sigma^2 & 0 \\ 0 & -k\sigma^2 & \sigma^2 & 0 \\ k\sigma^2 & 0 & 0 & k^2\sigma^2 + \sigma'^2 \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

と表せる。但し、$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$, $\sigma'^2 = \langle x'^2 \rangle = \langle y'^2 \rangle$

(2.42)と(2.54)を比べると

$$\mathcal{L} = \mathrm{k}\sigma^2$$

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2} \qquad (\varepsilon_u = \sigma\sigma')$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2}} \tag{2.55}$$

となる。ここで$\varepsilon_u$は非相関横方向エミッタンス(熱エミッタンス)と解釈でき、(2.51)から求められる RFBT 後のエミッタンスは

$$\varepsilon_\pm = \sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2} \pm \mathcal{L} \tag{2.56}$$

となる。また、角運動量が熱エミッタンスよりも十分に大きい($\mathcal{L} \gg \varepsilon_u$)とき(2.56)は次の様に近似できる。

$$\varepsilon_+ = 2\,\mathcal{L}\ , \ \ \varepsilon_- = \frac{\varepsilon_u^2}{2\,\mathcal{L}} \tag{2.57}$$

(2.57)から、RFBT によって生成された非対称なエミッタンスの比は次の様に表される。

$$\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} \approx \left(\frac{2\mathcal{L}}{\varepsilon_u}\right)^2 \tag{2.58}$$

以上より、ソレノイド磁場中で生成したビームから非対称エミッタンスを作ることができると示された。RFBT 後の非対称なエミッタンス比は、熱エミッタンスとソレノイド磁場が与える角運動量によって決まる。また、(2.57)のエミッタンスの積をとると次の様になる。

$$\varepsilon_+\varepsilon_- = \varepsilon_u^2 \tag{2.59}$$

この結果から、RFBT 後のエミッタンスの積と、カソードでビームが持つ熱エミッタンスの積は一致しており、位相空間操作においてエミッタンス積が保存されていることがわかる。

次に、ビーム行列の非対角成分を除去する役割を持つ、Skew Quadrupole×3 の構成について考える。

通常の Quadrupole×3 の転送行列$M_{NQ}$を次の様に定義する。

$$M_{NQ} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

Skew Quadrupole×3 の場合は、回転行列(2.27)を用いて

$$M = R^{-1}M_{NQ}R \tag{2.61}$$

で表せる。(2.27)の$\theta$が 45 度の場合を代入すると(2.61)は次の様に書ける。

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_+ & A_- \\ A_- & A_+ \end{pmatrix} \qquad A_\pm = A \pm B \tag{2.62}$$

(2.42)での非対角成分が 0 となるためには

$$\varepsilon\left(A_+T_0\widetilde{A_-} + A_-T_0\widetilde{A_+}\right) + \mathcal{L}\left(A_+\mathrm{J}\widetilde{A_+} - A_-\mathrm{J}\widetilde{A_-}\right) = 0 \tag{2.63}$$

となればよい。これを解くためにシンプレティック行列 $S$を用いた条件

$$A_- = A_+S \tag{2.64}$$

を用いると、(2.63)の第 2 項は$|\mathcal{S}|$=1 であることから消え、第 1 項も次の条件を満たすときに消える。

$$T_0\tilde{S} + S\widetilde{T_0} = 0 \tag{2.65}$$

$T_0$は対称行列であるため、(2.65)から次の関係が分かる。

$$ST_0 = -T_0\tilde{S} = -\widetilde{ST_0} \tag{2.66}$$

$ST_0$は反対称行列であり、$|T_0| = |S| = 1$であるから$ST_0 = \pm J$となる。このことから S 行列は次の様に書くことができる。

$$S = \pm J T_0^{-1} = \pm \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ \dfrac{1+\alpha^2}{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

これを(2.40),(2.41)で比べると、$S$行列は回転対称なビームの対角成分$\langle XX \rangle, \langle YY \rangle$によって決まることが分かる。

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \Sigma_{12} & -\Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} & \Sigma_{12} \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

Skew Quadrupole×3 による輸送後のビーム行列の対角成分$\langle XX \rangle, \langle YY \rangle$は次の様に表される。

$$2\Sigma_{XX,YY} = \varepsilon\left(A_+ T_0 \widetilde{A_+} + A_- T_0 \widetilde{A_-}\right) \mp \mathcal{L}\left(A_+ J \widetilde{A_-} - A_- J \widetilde{A_+}\right) \tag{2.69}$$

但し、$ST_0\tilde{S} = T_0$と$J\tilde{S} = -SJ = \pm T_0$は$S$行列の符号によって決まる。従って Skew Quadrupole×3 出口でのビーム行列は$S > 0$のとき

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_- T & 0 \\ 0 & \varepsilon_+ T \end{pmatrix} \tag{2.70}$$

ここで、$T = \frac{1}{2} A_+ T_0 \widetilde{A_+}$ ，$\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm \mathcal{L}$である。また、$M$のシンプレティック条件から次の関係が成立する。

$$\left| {}^{A_+}\!/_2 \right| = \left| {}^{A_-}\!/_2 \right| \quad , \qquad \left| {}^{A_+}\!/_2 \right| + \left| {}^{A_-}\!/_2 \right| = 1 \Rightarrow |A_\pm| = 2 \Rightarrow |T| = 1 \tag{2.71}$$

これは、Skew Quadrupole×3 が(2.64)を満たすことを示す。

通常の Quadrupole の thin-lens 近似の 2×2 輸送行列は次の様に表される。

$$Q(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \tag{2.72}$$

$q$は磁場勾配であり、quadrupole の焦点距離 $f$を用いて$q = \frac{1}{f}$と表せる。ドリフト空間の

2×2 転送行列 D は、ドリフト長$d$を用いて

$$D(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

3 つの Skew Quadrupole をそれぞれ SQ(1),SQ(2),SQ(3)とし、SQ(1)と SQ(2)間の距離を$d_2$、SQ(2)と SQ(3)間の距離を$d_3$と設定する。Skew Quadrupole の輸送行列において、電子の座標$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$は行列 A によって変換され、$Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$は行列 B によって変換される。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

$$B = A(-q_1, -q_2, -q_3, d_2, d_3) \tag{2.75}$$

(2.74)と(2.75)を(2.64)式に代入し、$q_i(i = 1,2,3)$について解くと、SQ(1),SQ(2),SQ(3)それぞの磁場勾配は次の様に求まる。

$$q_1 = \pm\sqrt{\frac{-d_2S_{11} + S_{12} - d_2d_TS_{21} + d_TS_{22}}{d_2d_TS_{12}}}$$

$$q_2 = -\frac{S_{12} + d_TS_{22}}{d_2d_3(1 + S_{12}q_1)}$$

$$q_3 = -\frac{q_1+q_2+d_2S_{11}q_1q_2+S_{21}}{1+(d_Tq_1+d_3q_2)S_{11}+d_2d_3q_2(S_{21}+q_1)} \tag{2.76}$$

ここで、$S_{ij}$は $S$行列の $ij$成分。$d_T = d_2 + d_3$、$S$行列は相関行列$S^{co}$と呼ばれ、xy の相関を表す行列であり次の様に表される。

$$Y = S^{co}X \tag{2.77}$$

熱エミッタンスが 0 のとき$S^{co} = S$　($\Sigma_0$の式で$\sigma' = 0$)となる。

## 3. STF ビームライン

本章では STF のビームラインの構成について説明する。Fig3.1 は高エネルギー加速器研究機構（KEK)の超伝導加速器試験施設（STF）のビームライン概略図である。

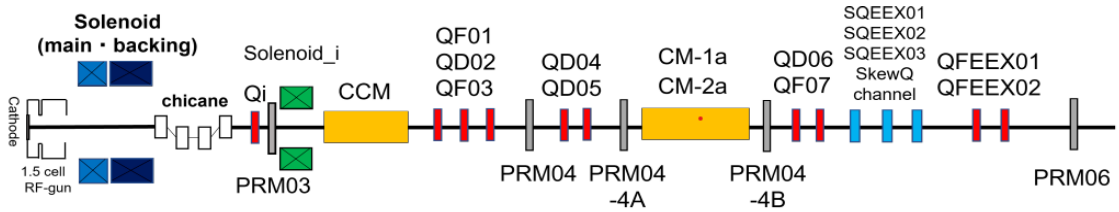


Fig3.1 STF ビームラインの構成

STF では、電子ビームの生成はフォトカソード RF 電子銃によって行われる。このカソードは RF 空洞に挿入されており、パルスレーザーを前方から照射されることで、光電効果により電子ビームが生成される。カソードで取り出された電子ビームは電子銃空洞からとりだされ、CCM（Capturte Cryo-Module） と CM(Cryo-Module)という二つの冷凍容器内に格納された合計 13 台の TESLA 型の超伝導加速空洞によって加速される。

### 3-1 カソード

STF における電子ビームは、光電効果によって生成される。フォトカソードにはモリブデンの表面にセシウムとテルルを数 nm の厚さで蒸着し、$Cs_2Te$が成膜されたものが使用されている。$Cs_2Te$のエネルギーギャップ$E_g$は 3.3eV であり、電子親和力$E_a$が 0.2eV の p 型半導体としての性質を有している。Fig 3.2 に示す$Cs_2Te$のバンド図から、伝導帯の最高エネルギー準位$E_f$は 4.05eV であり、価電子帯の最高エネルギー準位は価電子帯のエネルギーから-0.7eV の準位に位置している。【2】によるとレーザーエネルギー4.72eV の場合、カソードから取り出される電子の運動エネルギーは$E_{kin} = E_f - E_g - E_a$の関係から 0.55eV であると考えられている。一方、STF で使用されるレーザーは、Nd:YLF の四倍高調波である波長 266nm の紫外光である。光子エネルギー4.67eV であるため、【2】での計算モデルを適用し、カソードに生成される電子の運動エネルギーを$E_{kin}$= 0.55eV としてシミュレーションした。

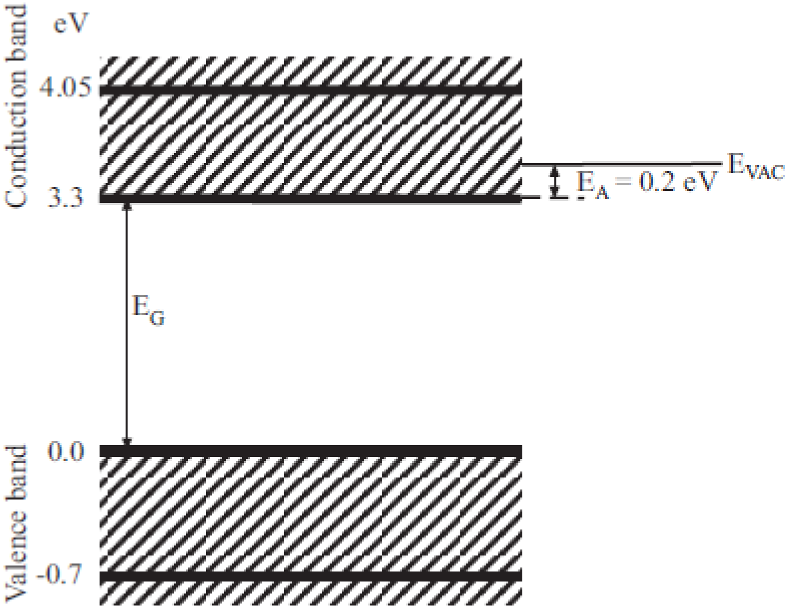


Fig3.2　$Cs_2Te$のエネルギーバンド【2】より引用

また、カソード上に生成されたビームの熱エミッタンスは、運動エネルギーとスポットビームサイズから計算することができ、次の式で表される。

$$\varepsilon_{th} = \sigma\sqrt{\frac{2E_{kin}}{3mc^2}} \tag{3.1}$$

ここで、$\sigma$は rms スポットサイズ、$mc^2$は電子の静止エネルギーである。例えば、レーザースポットサイズ 1mm のとき、熱エミッタンス$\varepsilon_{th}$は 0.85$\mu$m となる。

## 3-2 RF-gun

フォトカソードで取り出された電子ビームは RF-gun の作る高周波電場によって加速される。STF の RF-gun は常伝導 L-band 銅製 1.5 セルで構成され、運転周波数 1.3GHz、ピーク電場約 50MV/m の$TM_{010}\,\pi$モードで高周波電場を形成する。Fig3.3 に電場マップを示す。縦軸は中心軸上の z 方向電場、横軸はカソード端板からの距離である。

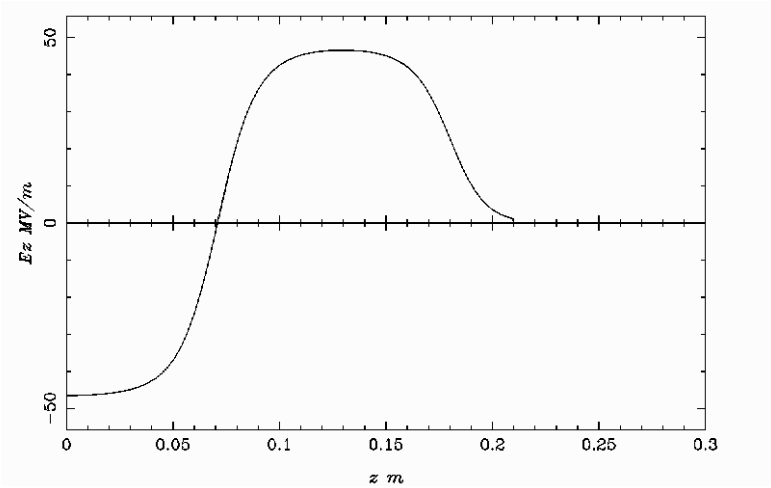


Fig3.3　1.5 セル RF-gun 電場マップ

## 3-3 ソレノイド

STF では main と buck 2 つのソレノイドが配置されており（Fig3.1)、この 2 つのソレノイドに流す電流の大きさや向きを変えることで磁場強度や収束力を調整する仕組みになっている。RFBT を行う場合、カソードでビームに角運動量を与える必要があるため、2 つのソレノイドは同じ極性を持つ。反対に、角運動量を与えたくない場合、ソレノイドの極性を互いに逆にし、main でつくられる磁場を buck で打ち消す必要がある。Fig3.4 は Poisson super fish で計算されたソレノイド断面図を示す。ピンク色の線が Poisson Super Fish を用いて計算した磁力線。Coil は York によって隔てられており、カソードは York 端から 8.5cm、ビーム軌道の中心は York 端から 14cm に位置する。

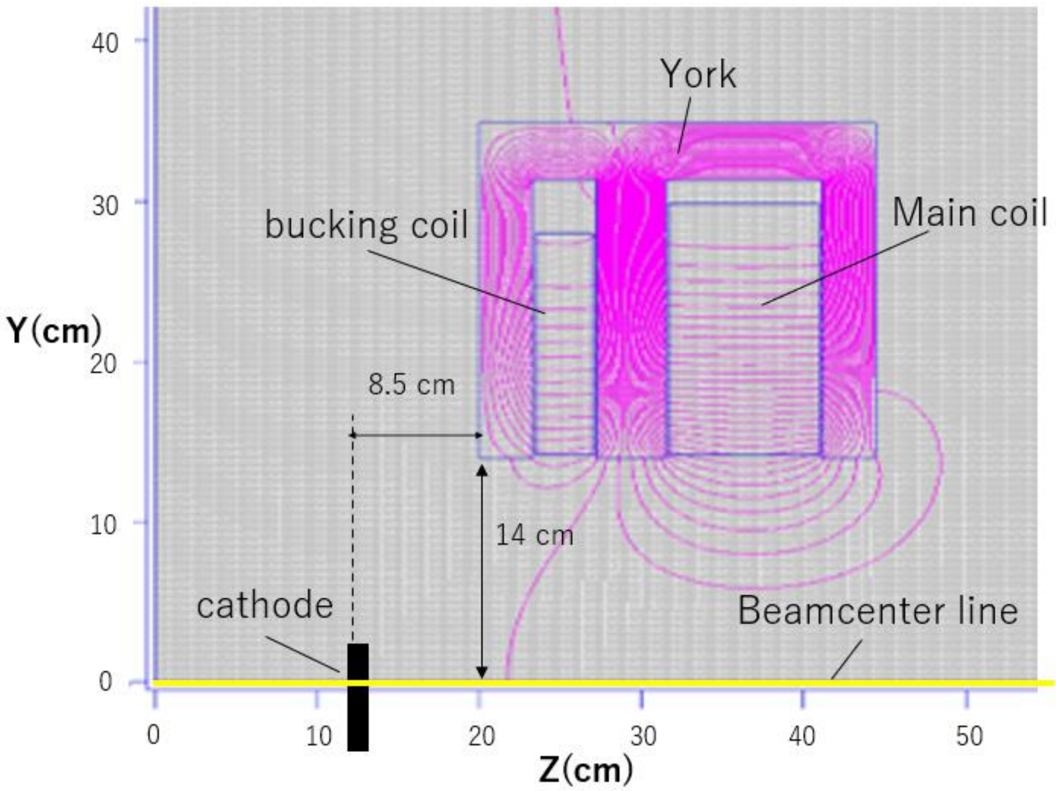


Fig3.4 Poisson super fis で計算されたソレノイドの y-z 断面図

Fig3.5 はソレノイドの極性を逆にしたときのカソード上磁場を計算したものである。z=0m がカソード表面である。縦軸は中心軸上の z 方向磁場、横軸はカソード端からの距離である。

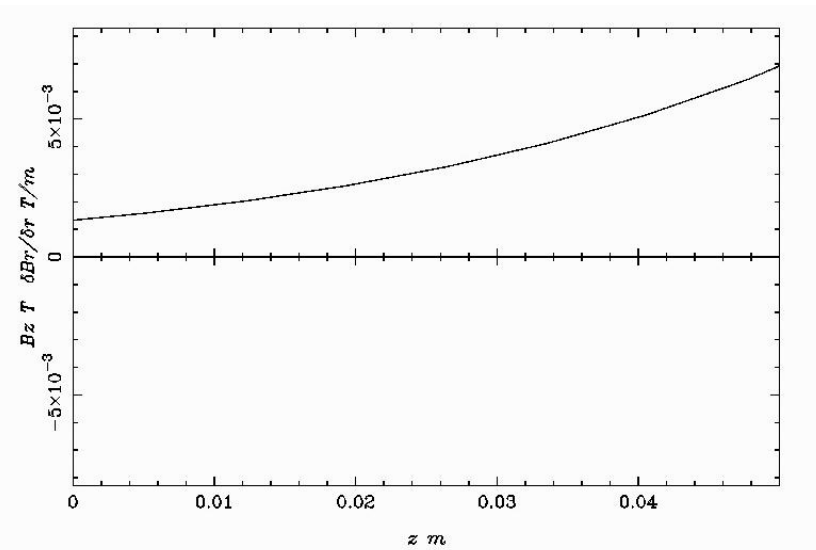

Fig3.5 main・buck が逆極性でのカソード上磁場

この時の磁場強度は約 1.3E-03T となり、カソード上の磁場はほとんど 0 になる。

## 3-4 超伝導加速空洞

STF の超伝導加速空洞は CCM と CM の 2 セクションで構成されており（Fig3.1)、CCM 内に 2 台、CM 内に 12 台の加速空洞が設置されている。超伝導空洞は 2K で運転される。超流動ヘリウムを減圧することで、2K という極低温を実現している。加速空洞は純ニオブ製、9 セル RF 周波数 1.3GHz の$TM_{010}\,\pi$モードであり、加速菅一本あたりの平均加速勾配はおよそ 30MV/m になる。RF-gun によって送られたビームは、CCM 出口で約 40MeV、CM 出口で約 360MeV まで加速される。Fig3.5 に 9 セル TESLA 空洞電場マップを示す。縦軸は中心軸上の z 方向電場、横軸は空洞中心を 0 とした時の z 方向座標である。

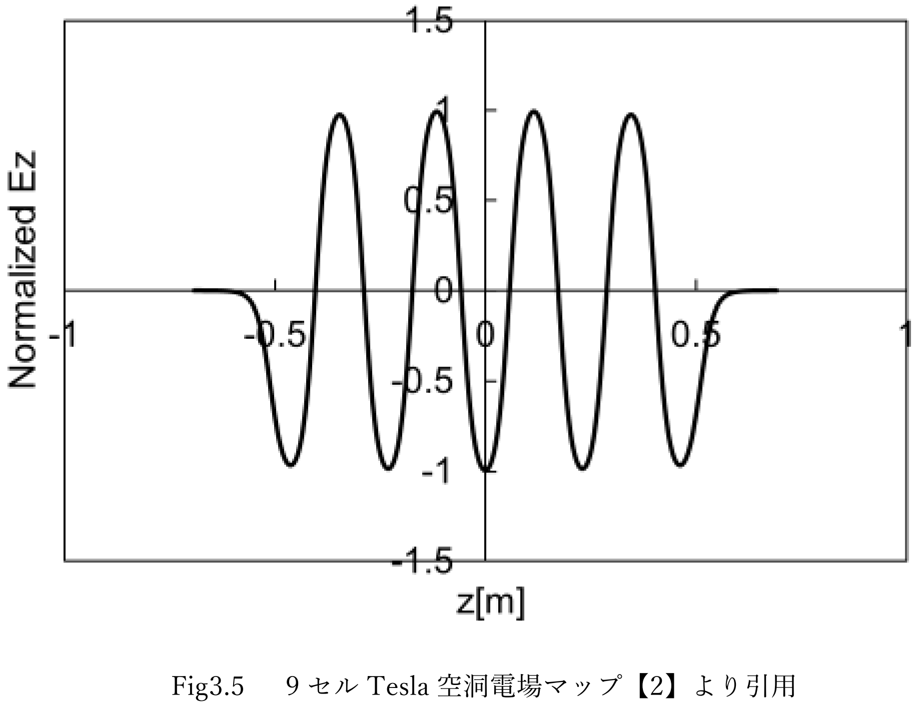


Fig3.5　 9 セル Tesla 空洞電場マップ【2】より引用

## 4. KEK STF における RFBT 実験

2022 年 12 月に KEK の STF において RFBT の予備実験を行った。

実験の第一段階では、カソード上でのソレノイド磁場が 0 とし、角運動量を与えない状態で、ビームを下流まで輸送すること目指した。RFBT によって高いエミッタンス比を得るには、エミッタンス増大を抑制する必要があるが、ソレノイドによってビームに角運動量が与えると、見かけ上エミッタンスが大きく増加して見えるため、エミッタンス増大の測定が困難だからである。第一段階で問題なく測定が可能であることが確認されたら、ソレノイド磁場を与えた状態（RFBT コンディション）で skew をいれて実験を行う。以下に実験の手順を説明する。

① RF-gun 立ち上げ

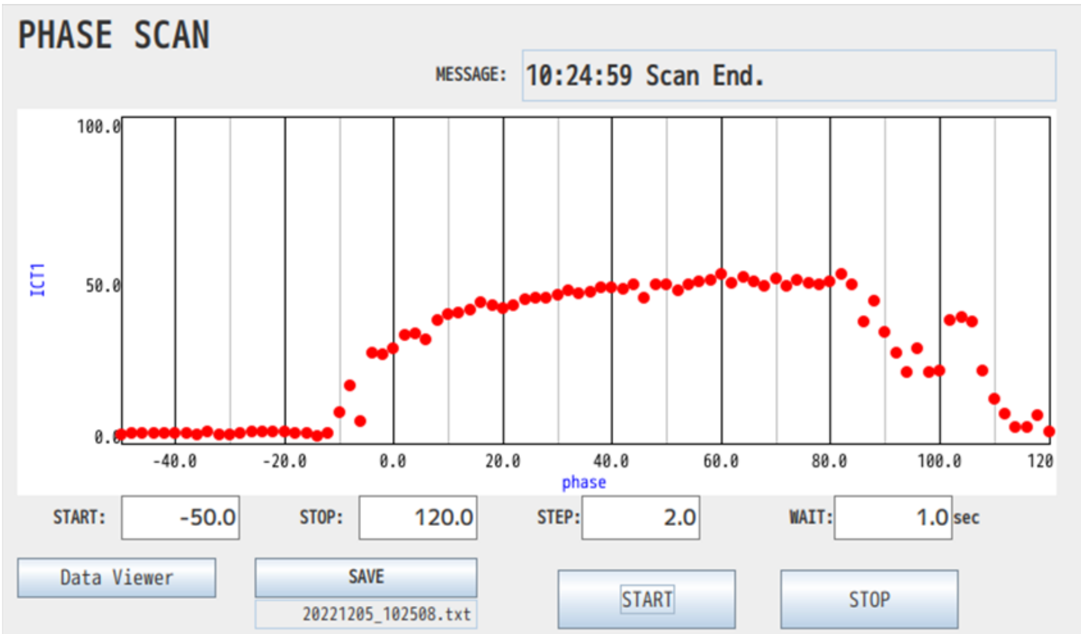


Fig4.1 RF 位相のスキャン

Fig4.1 は RF 位相のスキャンの様子である横軸は相対的な RF 位相で、-10 度あたりがカソード上の電場がゼロとなる位相に相当する。縦軸は 1 バンチ当たりの電荷量を示す。40pC/bunch になるように出力を調整した。

② BH1 を用いて CCM の位相合わせ

ベンディングマグネット BH1 の磁場強度を調整してビームの軌道を曲げることで、ビームの運動エネルギーを測定する。ビームが安定したら phase scan を開始する。phase scan では、ビームサイズが最小かつエネルギー最大の位相に設定した。BH1 でのエネルギーは 41MeV 程度であった。この値はシミュレーション値と概ね一致している。Fig4.2 に CCM の位相スキャンの結果を示す。

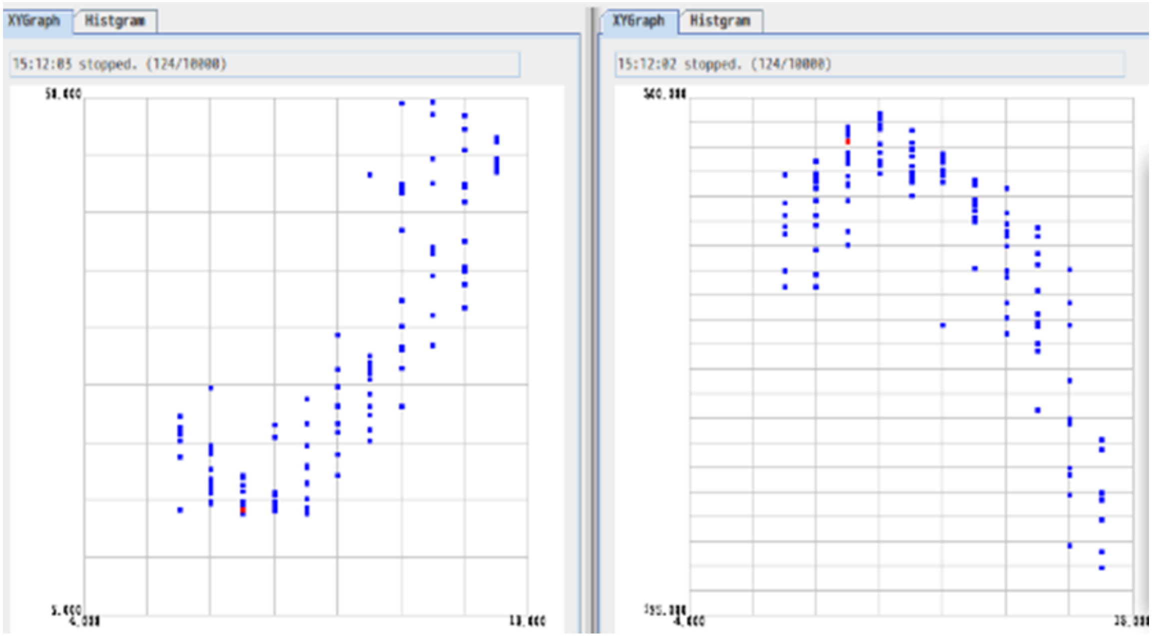


Fig4.2 CCM の位相スキャン。横軸位相、縦軸ビームサイズ(左),ビームの運動エネルギー(右)

③ CCM 後で Qscan

②で CCM の位相が決まったら、次は CCM 後方に位置するスクリーン PRM04（Fig3.1）で Q スキャンを行う。Q スキャン法は、四重極磁石を用いてビームを変調させることにり、ビームのプロファイルを変化させ、それをスクリーンに射影することでビームの位置と運動量の関係を測定する手法である。以下 Q スキャン法について【9】に従って説明する。

Fig4.3 に示すように、厚さ $\ell$ の Q から L 離れた位置にスクリーンを置く場合を考える。Q の位置を$S_1$、スクリーンの位置を$S_2$とすると、二点間のビームマトリクスの関係は、ドリフト空間と Q の輸送行列を用いて次の様に書ける。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

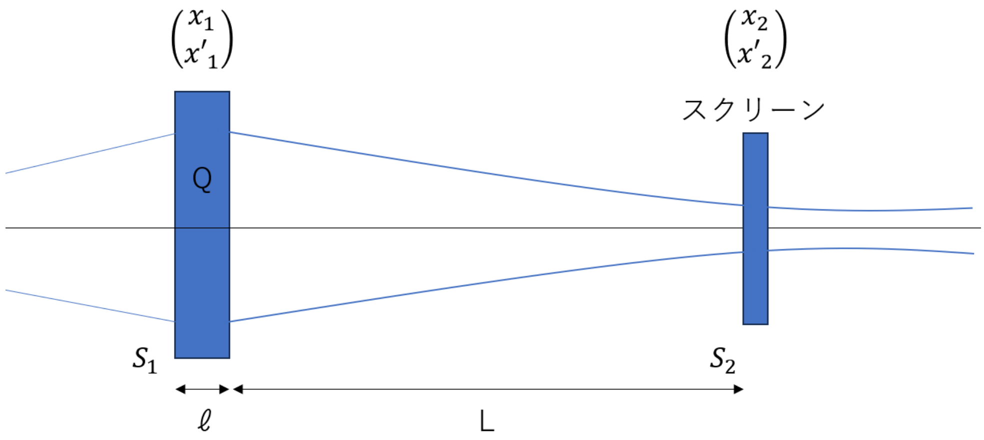


Fig4.3 Q とスクリーンの位置関係

ここで$K$は Q の K 値のことを指す。また、Twiss パラメータの輸送は輸送行列の行列成分 m を用いると以下の式で記述される。

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

この式にドリフト空間、Q のそれぞれの輸送行列の成分を代入して、(4.1) の関係に当てはめると、二点間の Twiss パラメータは次の様になる。

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2L & L^2 \\ 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K & 1 & 0 \\ K^2 & 2K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

この関係から$\beta_2$を計算すると

$$\begin{aligned} \beta_2 &= (1 - 2KL + K^2L^2)\beta_1 + (-2L + 2KL^2)\alpha_1 + L^2\gamma_1 \\ &= L^2\beta_1 \left\{ K - \left( \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \right\}^2 + \frac{L^2}{\beta_1} \end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4) 式の変形には $\gamma = (1+\alpha^2)/\beta$ が使われている。ここで、$\sigma = \sqrt{\varepsilon\beta}$の関係から、$S_2$でのビームサイズ$\sigma_2$を計算すると

$$\sigma_2 = \sqrt{L^2\sigma_1^2 \left\{ K - \left( \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \right\}^2 + \frac{L^2\varepsilon^2}{\sigma_1^2}} \tag{4.5}$$

この関係式により、K 値とビームサイズの関係が求められる。Q スキャンでは、Q の磁場を変化させながら横軸に K 値、縦軸にビームサイズをプロットしてフィッティングすることでエミッタンスを測定する。フィッティングには次の関係式が用いられる。

$$\sigma = \sqrt{a(K-b)^2 + c} \tag{4.6}$$

これと、(4.5)を比較してみると$a, b, c$はそれぞれ

$$a = L^2\sigma_1^2\ ,\qquad b = \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\ ,\qquad c = \frac{L^2\varepsilon^2}{\sigma_1^2} \tag{4.7}$$

と書ける。このことからエミッタンスは最終的に次の様に書ける。

$$\varepsilon = \beta\gamma\frac{\sqrt{ac}}{L^2} \tag{4.8}$$

ここで、$\beta$と$\gamma$はローレンツ因子である。

Table4.1 は、カソード上磁場が 0 になる main と buck の比を保ったまま各ソレノイドの磁力を変化させたときの Q スキャンの結果をまとめたものである。スクリーン位置は PRM04、変化させる Q は QF03 を使用した。

| B-main(A) | B-buck(A) | εx | εy |
|---|---|---|---|
| 334.12 | 121.19 | 測定不能 | 測定不能 |
| 324.12 | 117.57 | 5.63 | 1.91 |
| 313.22 | 114.89 | 3.15 | 3.13 |
| 311.22 | 112.89 | 5.91 | 2.92 |
| 310.22 | 112.53 | 2.61 | 5.78 |
| 309.12 | 113.83 | 5.54 | 4.18 |

Table4.1 ソレノイドを変化させたときの Q スキャン

main=313.22A,buck=114.89A のときに xy エミッタンスが対称になっていることから、カソード上磁場 0 の条件で、このソレノイドの電流値の組み合わせで固定した。次に、同じ条件でシケイン偏向角を大きくして、低エネルギー側の粒子を殺すと x,y エミッタンスは 2 µm 程度まで抑え込められた。この時の Q スキャンの結果を Fig4.4 に示す。

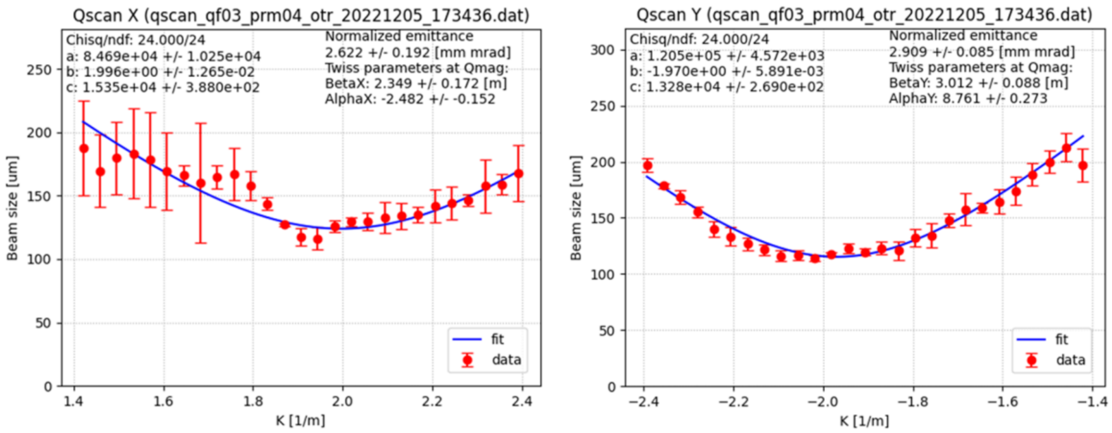


Fig4.4 chicane 偏向角を大きくしたときの Q スキャン x エミッタンス(左), y エミッタンス(右)

シケイン偏向角を大きくすると、低エネルギー領域の電子がシケイン内部の壁に当たって消滅し、高エネルギー領域の電子が通過していく。この結果から、装置から漏れ出ている低エネルギーの暗電流がエミッタンスに悪影響を与えていたことが分かる。以降、シケイン偏向角をこの時の値で固定して実験を行った。

④ BH2 を用いて CM1,CM2 の位相合わせ

CCM 後でエミッタンスの測定ができたら、②と同様の手順で CM1,CM2 の位相を合わせる。この時もビームサイズ最小、運動エネルギーが最大となる位相に設定する。このとき、ベンディングマグネット BH2 で測定したエネルギーは 241MeV であった。

Fig4.5 に CM1,CM2 での phase スキャンの様子を示す。

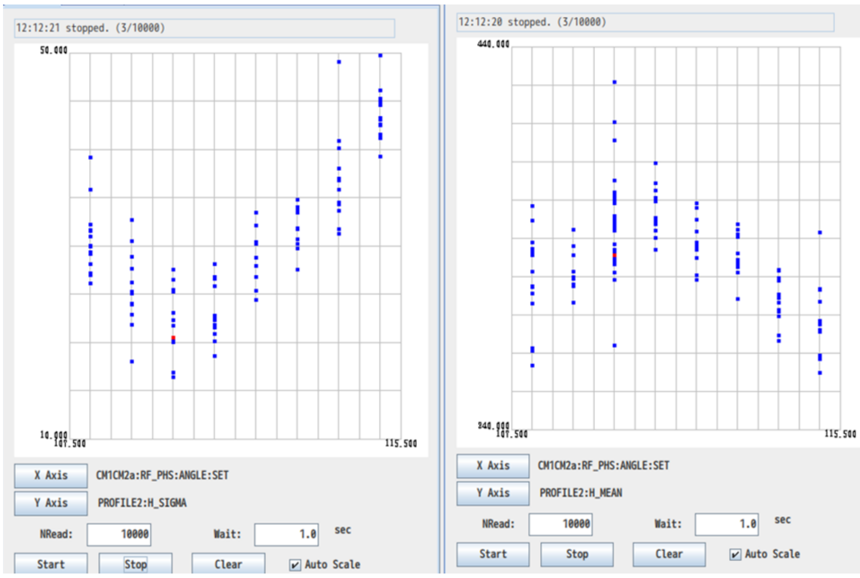


Fig4.5 CM1,2 の位相スキャン。横軸位相、縦軸ビームサイズ(左),ビームの運動エネルギー(右)

⑤　CM 後で Qscan

CM 後方に位置するスクリーン PRM06 を用いて QF07 で Q スキャンを行った。CM を通すとビームの軌道が安定せず揺らいでいたことから、CMに入射する際の角度によって CM 内でビームがキックされている可能性を考慮し、ステアリングマグネット ST5 を用いて、CM に進入するビームの軌道を 2.41A から 3.81 A まで振りながらエミッタンスを測定した。しかし、角度によるエミッタンスの変化は見られなかったことから、CM の中心軌道を通すことにした。

ビームの軌道が安定しない原因について、ビームがソレノイド中心を通っていない可能性が考えられる。そこでソレノイドの磁場強度を変化させたときのビームのポジションについて調べた。Fig4.6 にソレノイドの磁場強度に対する PRM03 でのビームの横方向座標の分布を示す。

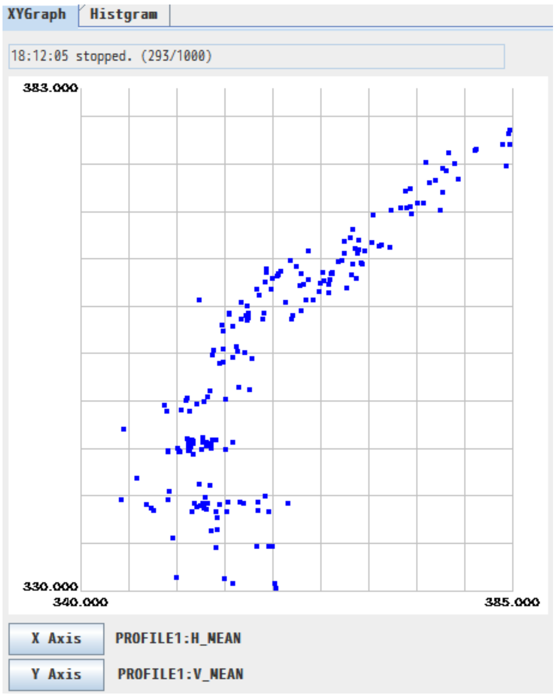


Fig4.6　ソレノイド磁場によるビーム座標の変化。横軸 x、縦軸 y

ビームがソレノイドの中心軌道を通っている場合、磁場強度を変えても座標は理想的には変化しないはずである。しかし Fig4.6 の結果から x、 y ともに 40mm ほどずれており、ビームは中心軌道を通っていないことが分かる。

これに対して、Fig4.7 はレーザー部に設けられているミラーを動かすことでビームの位置を調整し、再度磁場を変えながら PRM03 でビームの位置変化をプロットしたものである。

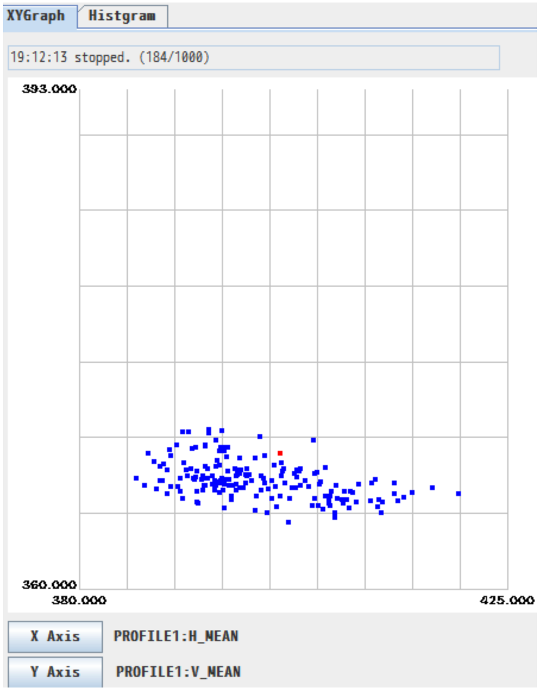


Fig4.7　ミラーによる調整後のビーム座標の変化

ミラーの調整幅の関係上、これ以上の精度は出せなかったが、x 方向のずれは 30mm ほど、y 方向のずれは 5mm ほどに抑えられた。この時のビーム軌道を Fig4.8 に示す。

また、この時のステアリングマグネットの電流値を Table4.2 に示す。

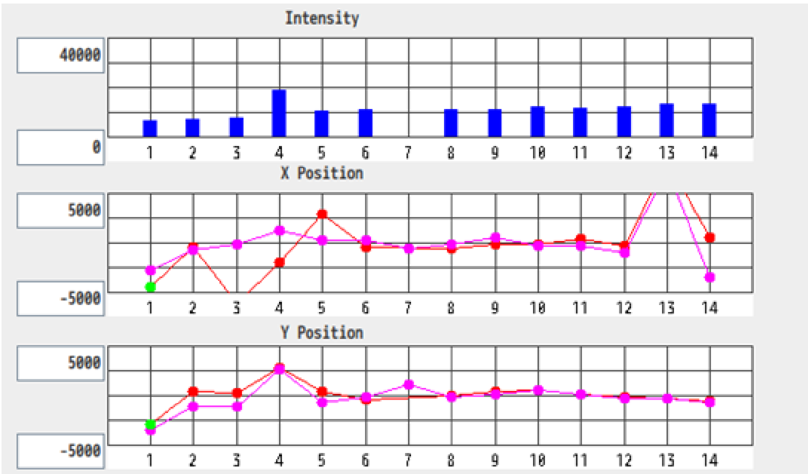


Fig4.9 ビーム軌道。ピンク線が設計軌道、赤線が実際の軌道

| ST3_X(A) | ST4_X(A) | ST5_X(A) | ST6_X(A) |
|---|---|---|---|
| -1.82 | -1.53 | -1.18 | -2.47 |
| ST3_Y(A) | ST4_Y(A) | ST5_Y(A) | ST6_Y(A) |
| 2.97 | -4.64 | 2.21 | 5.18 |

Table4.2 ステアリングマグネットの電流値(A)

ここで、ST はステアリングマグネットを指し、_X,_Y はそれぞれ x 方向、y 方向のビーム軌道の調整に使用される。

こうしてビーム軌道を安定させてから PRM06 で得られた最終的な Q スキャンの結果を Fig4.10 に示す。

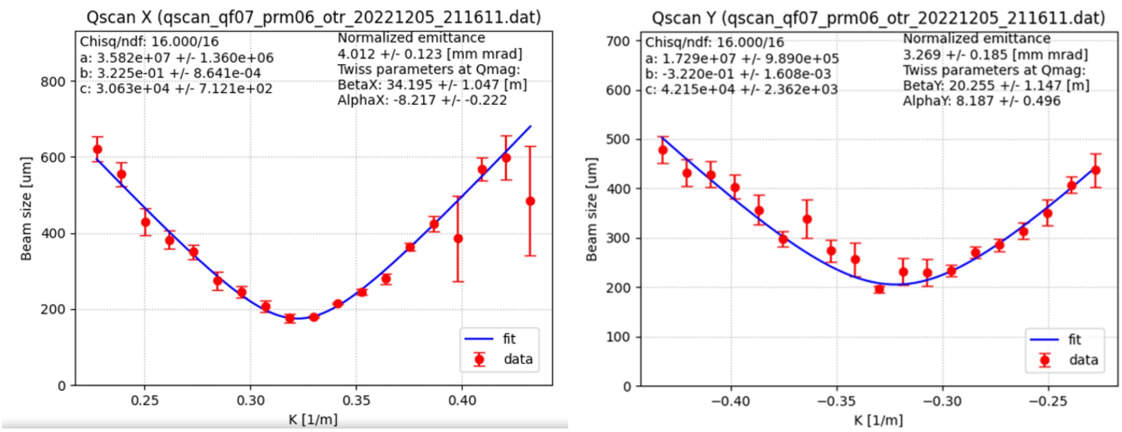


Fig4.10 PRM06 での Q スキャン。X エミッタンス（左図）、 y エミッタンス（右図）

CM 下流でのエミッタンスは x,y ともに 3～4$\mu$m 程度であった。

⑥ RFBT 構成での実験

ここまでは main ソレノイドと buck ソレノイドが逆極性で、カソード上に磁場を作らない条件で実験してきた。RFBT 実験ではカソード上磁場が必要となるため、buck ソレノイドの極性を反転させ、main ソレノイドと同極性にする。

RFBT 実験では 2 つのセッティングで行われた。Table4.3 にそれぞれのパラメータを示す。

| | Bmain(T) | Bbuck(T) | Q1(A) | Q2(A) | Q3(A) | Q4(A) | Q6(A) | Sk1(A) | Sk2(A) | Sk3(A) | エミッタンス比 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| planA | 0.07 | 0.09 | 13.4 | -17.4 | 15.5 | 2.9 | -1.3 | -7.2 | 7.5 | -12.9 | 400 |
| planB | 0.07 | 0.09 | 0.3 | -0.12 | 3.1 | 3.6 | 0 | -7.2 | 8.3 | -11.8 | 10 |

Table4.3 RFBT 実験の各オプティクスの値

planA は先行研究【10】によるシミュレーションで決められた値であるが、ビームが膨れすぎて下流まで通すことができず、エミッタンス測定はできなかった。そこで、planB では下流までビームが通るように STF で Skew 以外の値を手作業で調整し、その後シミュレーションで Skew の値を計算した。planB は Twiss パラメータの対称化にかかわる最適化は一切されておらず、下流までビームが通るようにしただけであるため最終エミッタンス比は悪い。Fig4.11 に planB の Skew 後でのエミッタンス測定の結果を示す。

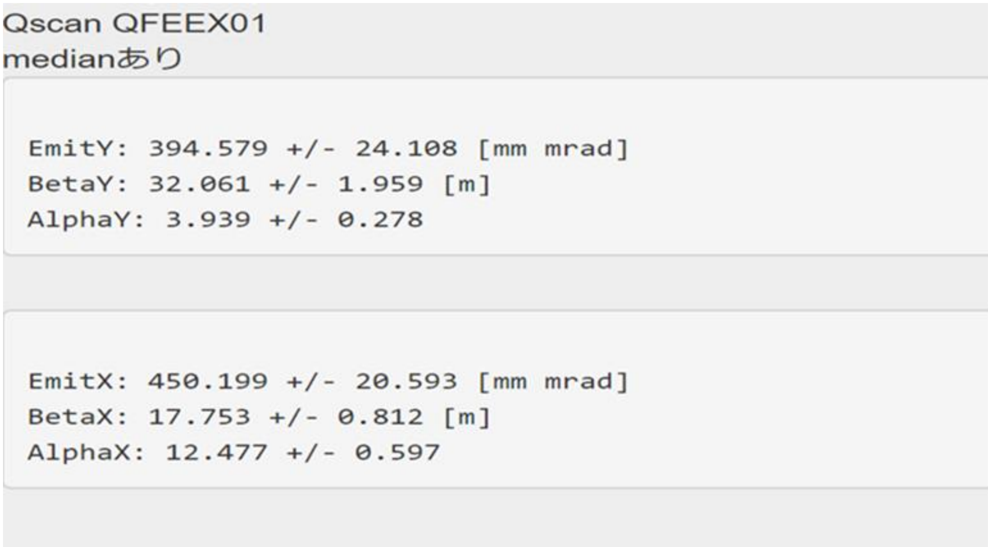


Fig4.11　planB での Skew 後のエミッタンスの測定値

シミュレーションでは $\varepsilon x=20\mu m, \varepsilon y=2\mu m$ であったことから、この結果はシミュレーションを全く再現していない。

2 つのセッティングに対して、上流部でのエミッタンス増大が顕著であり RFBT は全く確認できなかった。

# 5 シミュレーション

本章では RFBT のシミュレーションについて、その手法や 4 章に示した実験結果に対する考察を行う。シミュレーションには、空間電荷追跡アルゴリズム ASTRA(A Space Charge Tracking Algorithm の略【5】)および ELEGANT(ELEctron Generation ANd Tracking の略【6】)を用いて行った。

ASTRA は基準粒子に対する全粒子の相対的な運動を追跡することができ、多様な物理モデルが用意されていることから、空間電荷効果を含む非線形な影響を考慮できる。より実験に近い条件でシミュレーションすることを目指し、粒子の追跡はすべて ASTRA を用いて行った。それに対して ELEGANT は基準粒子を持たず、全粒子の統計を用いたビーム行列で計算され、空間電荷効果などの非線形効果を含むことはできない。しかし、ASTRA ができる最適化機能は 1 パラメータのみであり、STF のような複数のマグネットを用いた最適化には適していない。一方 ELEGANT の最適化機能には様々な手法が用意されており、対象とするパラメータも複数設定できる。このことから、本研究では粒子の追跡を ASTRA、パラメータの最適化を ELEGANT を用いて行った。

## 5-1　シミュレーションの手法

ASTRA は、粒子を生成する generator、外部の磁場や電場の影響を読み取って粒子を追跡する astra、マグネットや加速空洞の電磁場を表示する fieldplot、粒子の位相空間プロットを表示する postpro、ビームサイズ・エミッタンス等を表示する lineplot から構成される。

RFBT を行う際には Skew 入口で Twiss パラメータが xy 対称になっていることが重要である。ASTRA で粒子のトラッキングを行い、Twiss パラメータの対称化には ELEGANT の最適化機能を用いた。シミュレーションの流れは次の様になる。

(i) ASTRA の generator 機能で初期粒子を生成

(ii) Skew 入口までの粒子トラッキングを ASTRA で行う

(iii)ASTRA の output ファイルを ELEGANT で使用されるファイルの形に変換し、ELEGANT の source ファイルとして読み込む

(iv) ELEGANT の最適化機能を用いて Twiss パラメータが対称化されるように Quadrupole の k 値を決める

(v) (iv)で決めた k 値を ASTRA の input ファイルに代入し実行

(vi) (v)で実行された Skew 入口での S 行列（3.59）から、Skew の磁場勾配（3.68）を計算

以下に各プロセスを説明する。

（i）generator では粒子数、電荷量、ビームサイズ、粒子分布形状などの初期粒子分布の情報を与える。Fig5.1 に入力ファイルの例を示す。この場合、粒子数 10000、粒子の種類は電子、バンチ当たり電荷量 60pC のビームを生成するということになる。Cathode=T を指定すると、フォトカソードから電子が生成されるようになる。また、Dist_ではバンチ内の x,y,z それぞれの方向での粒子分布やサイズが決められる。Dist_x=g、sig_x=1.0 の場合、x 方向の粒子の位置の分布はガウス分布、rms サイズは 1.0mm といった具合である。Fig5.1 に generator のサンプルファイルを示す。

```
&INPUT
Add=.F,
  FNAME = 'initial_beam.ini'
  IPart=10000
  Species='electrons'
  Probe=.True.
  Noise_reduc=.T.
  Cathode=.T.
  Q_total=0.06
  Ref_zpos=0.
  Ref_clock=0E-3
  Ref_Ekin=0.
  Dist_z='g',  sig_clock=5.11E-3,
  Dist_x='g',  sig_x=1.0,
  Dist_px='g', Nemit_x=0.,   cor_px=0.0E0
  Dist_y='g' , sig_y=1.0,
  Dist_py='g', Nemit_y=0.,   cor_py=0.0E0
```

Fig5.1 generator 入力ファイルの例

generator で生成したビームの位相空間分布を postpro を用いてみてみると Fig5.2 のようになる。

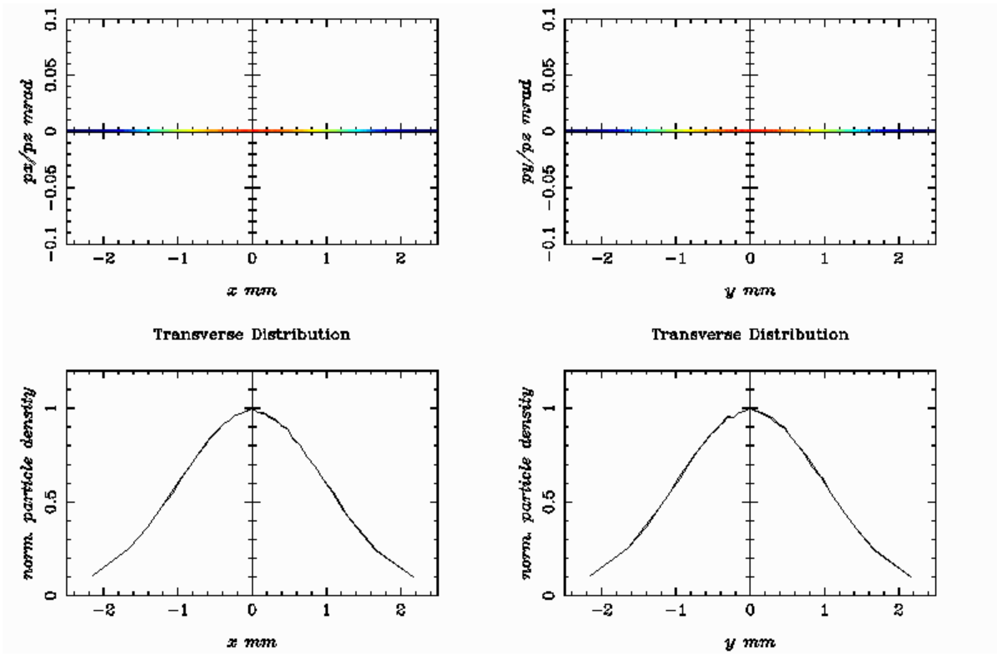


Fig5.2 x,y の位相空間分布（上）と密度分布（下）。暖色部分が粒子密度が高く寒色部分が粒子密度が低い。

この初期ビームはガウス分布を形成していることが分かる。

（ii）(i)で生成したビームを、設計したビームライン中でトラッキングする。設計したラインの間であれば任意の点にスクリーンを設けて、ビームの状態を確認できる。例えば Fig5.3 では CCM 出口付近での xy'位相空間分布を示す。ソレノイドによってビームが角運動量を持つ場合、図のように xy'(yx')間で相関が生じることが分かる。

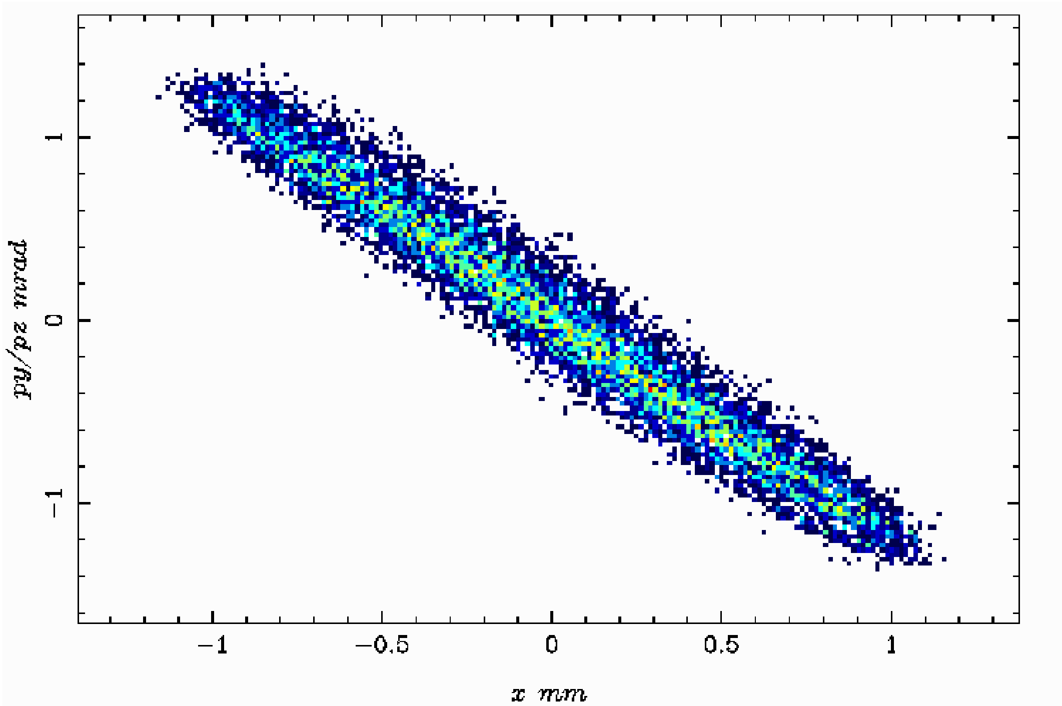


Fig5.3 CCM 出口付近での xy'位相空間分布

(iii) ELEGANT で使用されるファイルは SDDS 形式であり、ASTRA の output ファイルの形式と異なるためファイルをそのまま ELEGANT に挿入することはできない。ASTRA の output ファイルを SDDS 形式にするには"astra 2 elegant"というコマンドを実行する必要がある。この処理をした後のファイルを ELEGANT の初期ファイルとして与えることで、ASTRA と ELEGANT に互換性を持たせることができる。ELEGANT では、パラメータ最適化機能である"optimize"を使用して、Quadrupole の k 値を最適化する。

(iv)最適化では、SDDS ファイルから目的関数を定義し、初期パラメータ、誤差範囲、試行回数等を設定する。最適化には simplex 法が用いられ、目的関数が最小になるようにパラメータの探索を行う。

Simplex 法とは、初期パラメータを頂点とする多面体(simplex)を形成（例えば N 個のパ

ラメータの場合、N+1 多面体）し、目的関数が最小になるように各頂点を評価する。次に、頂点の中で最も評価の悪い頂点を除外し、最も評価の良い頂点から新たに頂点を作り出す。Simplex を定義域内で拡大・縮小・回転させながら行い、この作業を繰り返すことで最適パラメータを探索する手法である。

この simplex 法は grid 法（スキャン）に比べ、探索効率が良いというメリットがあるが、初期パラメータやセッティングの依存性が大きく、局所解に陥りやすいことに留意する必要がある。

Fig5.4 は、optimize の設定例である。目的関数 f=(αx-αy)^2+(βx-βy)^2 と設定した。ここで$\alpha,\beta$は Twiss パラメータである。

この関数 f を 0 に近づけることで x と y で Twiss パラメータを対象とすることを目指した。ここで、target は目的関数の目標値、tolerance は最適化の許容範囲、n_passes は試行回数、n_evaluations は 1pass 毎の評価回数、n_restarts は新たな頂点を生成する回数、order は SDDS ファイルに保存される行列成分のスケールを指す。シミュレーションの結果、tolerance は最適化の精度に大きく寄与していることが分かった。

```
&optimization_setup
        mode = minimize, method = simplex,
        target = 0, tolerance = 0.001,
        n_passes =10, n_evaluations = 10000,
        n_restarts = 30,
        matrix_order=3,
&end
```

Fig5.4　ELEGANT optimize 機能の設定例

Table5.1 は tolerance の大きさによって RFBT の精度がどの程度変わるかをシミュレーションしたものである。最適化では目的関数（target）f の最終目標値を 0 に設定し、tolerance と step size を調整しながら検証した。条件は cylindrical、10000 粒子、シケイン偏向角 16°、バンチ内電荷 30pC で、空間電荷効果を入れた状態で最終エミッタンス比を調べた。

| tolerance | target | εx/εy |
|---|---|---|
| 0.1 | 0.085 | 8.61 |
| 0.01 | 0.017 | 58.65 |
| 0.001 | 0.003 | 244.3 |
| 0.0001 | 0.003 | 127.6 |

Table5.1 tolerance の大きさと最終エミッタンス比

この結果から、tolerance を小さくするにしたがって target の精度が上昇することが確認できたが、tolerance が小さすぎると、ELEGANT は解を見つけられず適当なところで最適化を終了してしまう。この場合、tolerance=0.001 の時が最も精度よく最適化され、Twiss $\alpha$ と $\beta$ のズレはそれぞれ 0.18%程度となった。計算値では 253 が期待される値であり、ほとんど近い値が得られた。このように tolerance は最終結果に大きく影響を与えるため、慎重に吟味して設定する必要がある。

(v)Twiss パラメータの対称化を視覚的に確認するために、lineplot 機能を用いて Twiss パラメータの推移を見てみる。Fig5.5 には最適化後の k 値で ASTRA を実行したときの、Skew 直前の Twiss パラメータの一例を示す。

z=43.5m 付近から Skew セクションが始まる。ELEGANT によって最適化された k 値で実行すると skew 直前で Twiss パラメータが対称化される様子が分かる。また、この対称化の精度によって最終的なエミッタンス比は変わってくる。下の図の例では $\alpha$ x と $\alpha$ y の差はおよそ 0.14%、$\beta$x と $\beta$y の差はおよそ 0.07%となっており、$\alpha$ の差が 1 %、$\beta$ の差が 0.6%程度を上回るとエミッタンス比は著しく低下する。

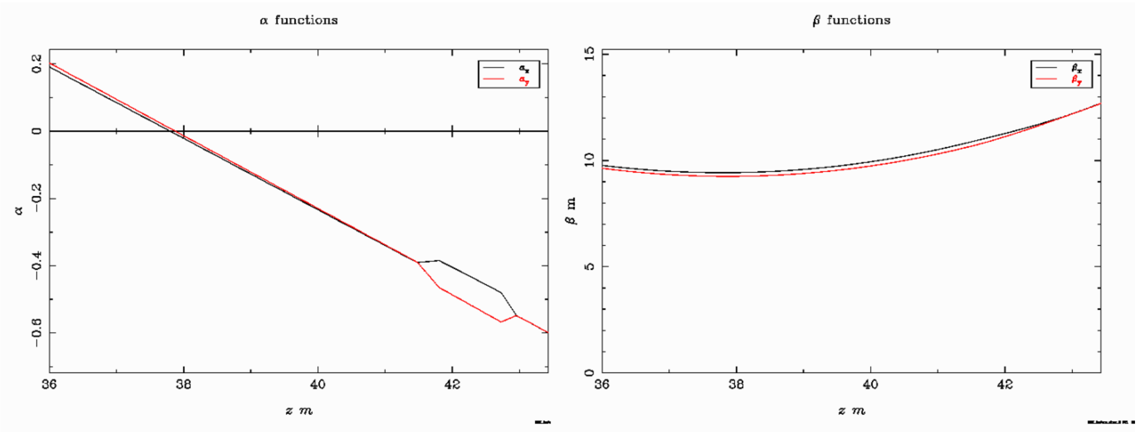


Fig5.5 skew 直前での $\alpha$ 関数（左）と $\beta$ 関数（右）の推移。黒線が x 成分、赤線が y 成分を表す

(vi)Skew 直前のビームの S 行列（2.67）の全粒子平均から、Skew の磁場勾配（2.76）を計算し、ASTRA を実行する。この磁場勾配の計算は S 行列の全粒子平均から求めているため、粒子数によって RFBT の精度が変わってくる。粒子数があまりに少ないと最適解がぼやけてしまうため、ある程度の粒子数が必要であるが、粒子数があまりに多いと一回のシミュレーションに要する時間が膨大になる。Fig5.6 は cylindrical、シケイン偏向角 16°、バンチ内電荷 30pC で、空間電荷効果を入れた状態で粒子数を変えながらシミュレーションした結果である。10000 粒子程度であれば精度よく RFBT が行われることが確認された。

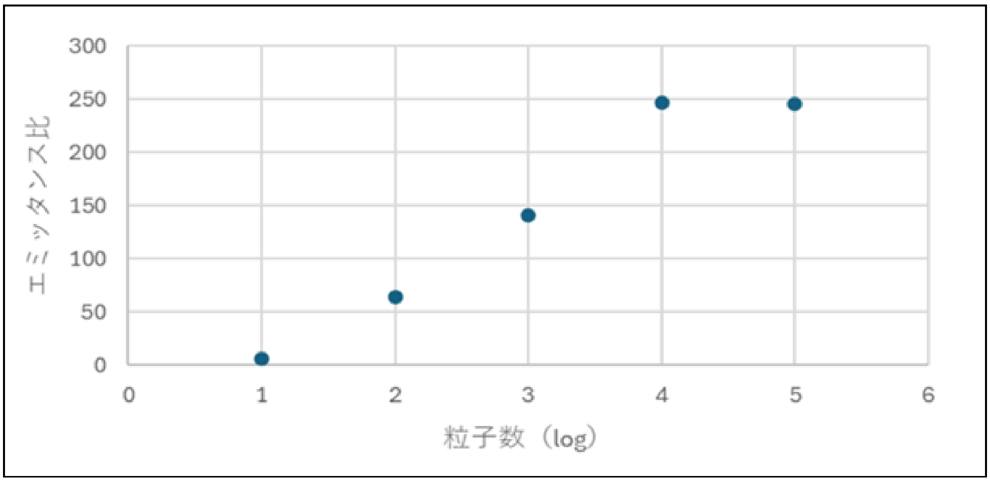


Fig5.6 粒子数による最終エミッタンス比の変化

粒子数が 10000 を超えると、計算値から期待されるエミッタンス比(253)に近い値になる。しかし粒子数が 100000 を超えると、一回のシミュレーションに要する時間が膨大となり、現実的ではなかったため、本論文では特に断りがない限り、バンチ内粒子数 10000 でのシミュレーション結果を示す。

Fig5.7 には Skew 出口での xy'位相空間分布を示す。横軸 x、縦軸 y'(=$\frac{p_y}{p_z}$)。

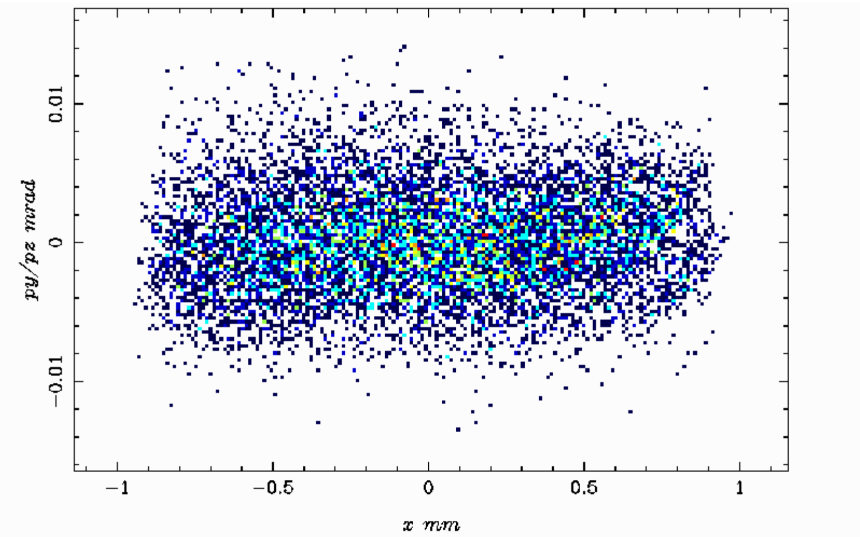


Fig5.7 Skew 出口での xy'位相空間分布

Fig5.3 で確認された角運動量による xy'相関が skew 後に解消されていることが分かる。これはビーム行列の非対角成分が対角成分に割り振られ、RFBT が行われたことを意味する。

## 5-2　RFBT の確認

4 章の RFBT 実験 planA に用いたパラメータを Table5.2 に示す。

| Parameter | Value | Units |
|---|---|---|
| Number of particles | 10000 | |
| Bunch charge | 60 | pC |
| RMS σx on cathode | 1.2 | mm |
| RMS σy on cathode | 1.2 | mm |
| RMS σz on cathode | 1.1 | mm |
| Bc on cathode | 1300 | gauss |
| RF gun phase | 25 | deg |
| RF gun peak gradient | -40 | MV/m |
| RF frequency | 1.3 | GHz |
| Q1 focusing strength | 0.99 | m^-2 |
| Q2 focusing strength | -1.77 | m^-2 |
| Q3 focusing strength | 0.33 | m^-2 |
| Q4 focusing strength | -0.51 | m^-2 |
| Q5 focusing strength | -0.51 | m^-2 |
| Q6 focusing strength | 0.26 | m^-2 |
| Q7 focusing strength | -0.26 | m^-2 |
| SkQ1 focusing strength | 2.69 | m^-2 |
| SkQ2 focusing strength | -3.96 | m^-2 |
| SkQ3 focusing strength | -4.48 | m^-2 |

Table5.2 RFBT 実験 planA のパラメータ

RF gun、Cavity の RF 位相は ASTRA の Auto phase 機能によって設定されており、運動エネルギーを最大化するように決められる。Q1~Q7 は前節で説明した ELEGANT の最適化機能によって Twiss パラメータが対称になるように最適化された値であり、SkQ1~SkQ3 は S 行列から計算した値である。Fig5.8 はビームラインに沿ってエミッタンス、Twiss パラメータをプロットした図である。赤い実線が x 成分、青い点線が y 成分を示す。

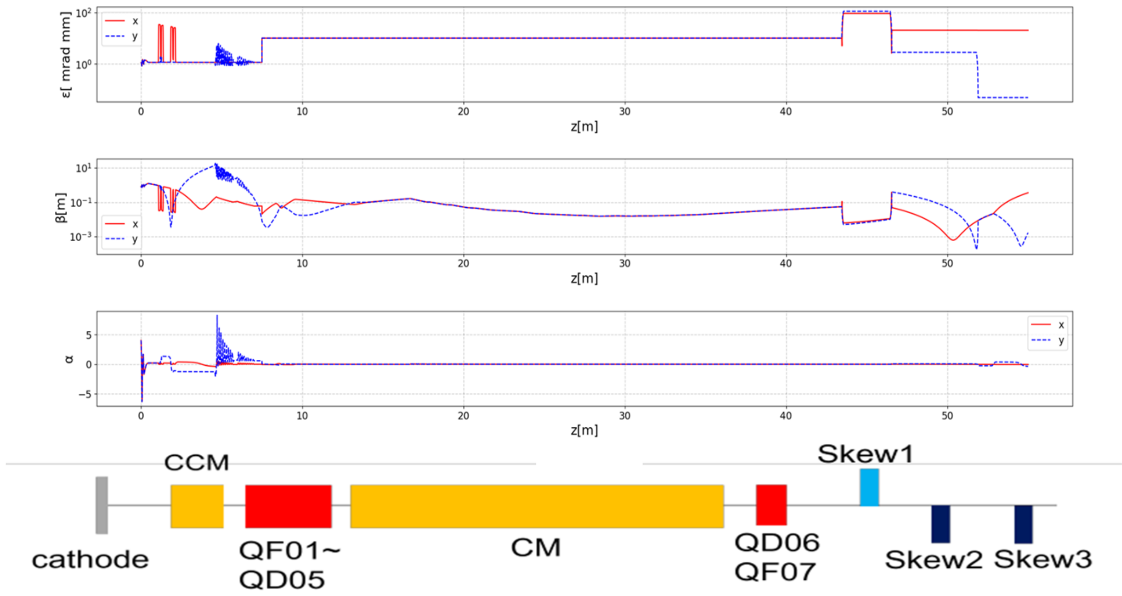


Fig5.8 ビームラインに沿ってプロットされたエミッタンス（上)、Twiss $\beta$ (中)、Twiss $\alpha$ (下)

Skew 入口で Twiss パラメータは対称になっており、Skew 出口で y 方向のエミッタンスが x 方向エミッタンスに対して極小になっていることが分かる。この時のエミッタンスの値を Table5.3 に示す。

| Posision | ε x(μm) | ε y(μm) | ε x/ ε y |
|---|---|---|---|
| cathode | 1.02 | 1.02 | 1.00 |
| after Skew | 62.57 | 0.12 | 521.42 |

Table5.3 初期エミッタンスと RFBT 後のエミッタンス

### 5-3　RFBT 実験の考察

本節では RFBT 実験において下流部までビームが通らなかったことや、上流部でのエミッタンス増大が顕著であったことについて以下の項目をシミュレーションで検証し、次回の実験に向けたセットアップについて考察する。

1. ビーム軌道
2. 4D エミッタンス
3. スライスミスマッチ

1. 実験に用いたシミュレーションでは、加速空洞内にアパーチャー（壁）が設けられておらず、ビームは CM の中心軌道を通るように設計されていた。そこで、前章 planA でビームの通過ができなかった CM 部について、CM に進入する際のビーム軌道の横方向シフトや、進入角度によってどの様な影響が出るのかを調べた。ASTRA に挿入したアパーチャーは STF の加速空洞のアイリス径 70mm【11】を参考にし、同径のものを使用した。Fig5.9 は STF の加速空洞と同モデルの断面図である。

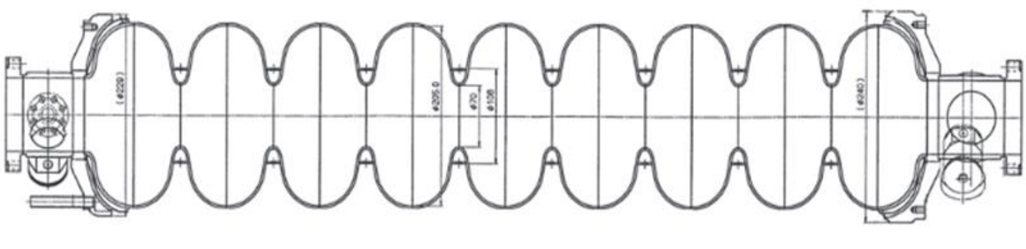

Fig5.9 STF キャビティ断面図【11】より引用

Fig5.10 は ASTRA に挿入したアパーチャー（点線）と、空洞内の電場（実線）の様子を示す。横軸はカソード端部を基準とした z 座標、縦軸は電場である。アパーチャーは直径で 70mm となるように設定し、STF キャビティの一番狭い開口部に合わせた。

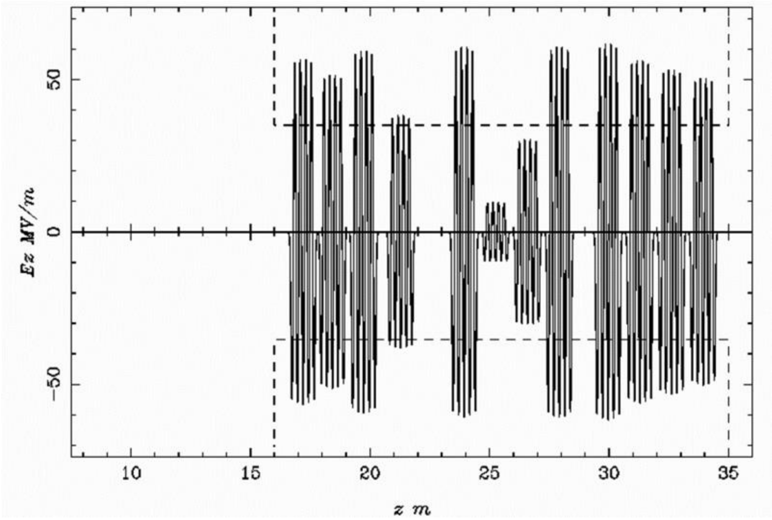


Fig5.10 ASTRA に挿入したアパーチャー（点線）と電場（実線）

ビーム軌道を変更する前の CM 入口での横方向ビームポジションを測定すると、x=1.6E-04mm , y=2.0E-04mm となっており、ほとんどビームラインの中心軌道を通過している。この時の座標を基準点として、±10mm ずつシフトさせ、粒子ロスの数と CM 出口でのエミッタンスを測定した。このときの結果を Table5.4 に示す。

| Xシフト(mm) | εx(μm) | εy(μm) | 粒子ロス |
|---|---|---|---|
| 33 | 測定不能 | 測定不能 | 10000 |
| 32 | 9.4 | 9.4 | 887 |
| 31 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 30 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 20 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 10 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -10 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -20 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -30 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -31 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -32 | 9.3 | 9.3 | 941 |
| -33 | 測定不能 | 測定不能 | 10000 |

| Yシフト(mm) | εx(μm) | εy(μm) | 粒子ロス |
|---|---|---|---|
| 34 | 測定不能 | 測定不能 | 10000 |
| 33 | 9.5 | 9.5 | 818 |
| 32 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 31 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 30 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 20 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 10 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -10 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -20 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -30 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -31 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -32 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -33 | 9.5 | 9.5 | 820 |
| -34 | 測定不能 | 測定不能 | 10000 |

Table5.4 横方向シフトと粒子ロス,X 方向シフト(左図),Y 方向シフト(右図)

ここで、粒子ロスはビームの進行方向 1m あたりに失われた粒子数であり、一度アパーチャーに衝突した粒子はその時点で粒子ロスにカウントされ、再び加速されることはない。Table5.4 から、x 方向、y 方向ともにシフトが±33mm 程度より小さければ粒子ロスが生じることが分かる。STF では CM の入口でキャビティ中心を通るようにステアリングマグネットで調整したため、ビームポジションのシフトによる影響は少ないと考えられる。

ここで、ビームは進行方向に対して角度を持っていないため、入射角度を持たせて粒子ロスを調べた。CM1,CM2 入口でのビームの平均座標(x,y)=(1.65E-04mm,1.96E-04mm)を基準として、x 方向、 y 方向に±0.20rad 入射角度を振った。Table5.5 にその結果をまとめて示す。

| X入射角(rad) | εx(μm) | εy(μm) | 粒子ロス |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 9.6 | 9.6 | 713 |
| 0.19 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.18 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.17 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.16 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.15 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.14 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.13 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.12 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.11 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.1 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.05 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.05 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.1 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.15 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.16 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.17 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.18 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.19 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.2 | 9.6 | 9.6 | 719 |

| Y入射角(rad) | εx(μm) | εy(μm) | 粒子ロス |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 9.6 | 9.5 | 709 |
| 0.19 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.18 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.17 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.16 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.15 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.14 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.13 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.12 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.11 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.1 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0.05 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| 0 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.05 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.1 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.15 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.16 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.17 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.18 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.19 | 10.2 | 10.2 | 0 |
| -0.2 | 9.6 | 9.5 | 710 |

Table5.5 入射角シフトと粒子ロス。X 方向シフト(左図)。Y 方向シフト(右図)

この結果から、CM への入射角度が±0.19rad よりも大きくなると CM 内での粒子ロスが発生することが分かる。STF 実験では目測でステアリングマグネットを使って CM に平行に通すようにしたことや、ビームの揺れがあったことなどから、CM 内での粒子ロスに関し

て、横方向のビームポジションの影響より、入射角度が影響していたと考えられる。

2.　エミッタンス増大を引き起こす要因として主に考えられるのは空間電荷効果の非線形成分の影響である。1 章で述べたように、空間電荷効果はローレンツ$\gamma$の 2 乗に反比例するため粒子が十分に加速されているセクションではほとんどその影響はない。従って、空間電荷効果によるエミッタンス増大の影響を抑えるには、ビームのエネルギーが低い上流部に着目する必要がある。STF のビームラインでは CCM 通過後のビームのエネルギーはおよそ 40MeV であり、粒子はほとんど光速に近い速さで運動する。そこで CCM に入るまでのエミッタンス増大を抑制する方法をシミュレーションで検証した。

CCM 前にあるパラメータが可変なオプティクスは main,buck 2 つのソレノイドとシケイン、Qi である。ここでは一旦シケインの偏向角を固定し、CCM 入口でのエミッタンス増大が最も小さくなるようなソレノイドと Qi の組み合わせを探索した。シケイン偏向角については後節で説明する。

Fig5.11 はソレノイドと Qi の強さを変更した時の CCM 入口でのエミッタンスである。

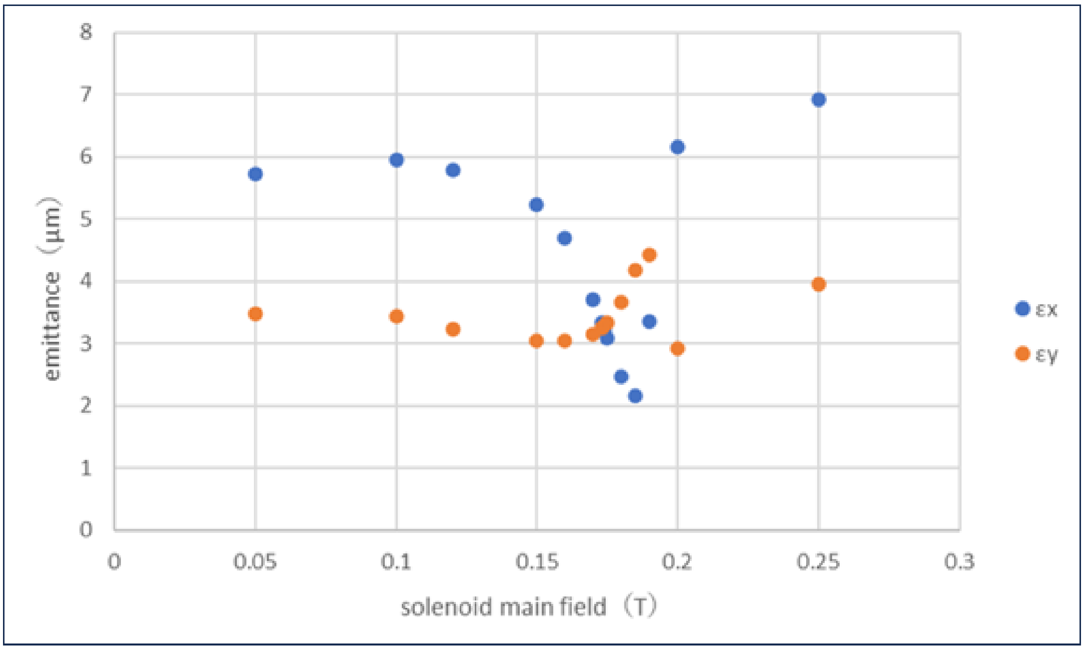


Fig5.11 ソレノイド,Qi をスキャンしたときの CCM 入口でのエミッタンスの変化

この結果から、x 方向エミッタンスの増分と y 方向エミッタンスの増分を同時に抑制でき

るようなパラメータの組み合わせは存在しないことが分かる。

そこで、ASTRA の output ファイルから、4×4 ビーム行列の成分を抜き出し、その行列式の 2 乗根を計算することで、4 次元的なエミッタンスを求め、その値を最適化の指標とした。以下、このエミッタンスを 4D エミッタンスと呼ぶことにする。4D エミッタンスは次式で記述できる。

$$\varepsilon_{4D} = \begin{vmatrix} \langle xx \rangle & \langle xx' \rangle & \langle xy \rangle & \langle xy' \rangle \\ \langle x'x \rangle & \langle x'x' \rangle & \langle x'y \rangle & \langle x'y' \rangle \\ \langle yx \rangle & \langle yx' \rangle & \langle yy \rangle & \langle yy' \rangle \\ \langle y'x \rangle & \langle y'x' \rangle & \langle y'y \rangle & \langle y'y' \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \tag{5.1}$$

ここで、$x', y'$は、進行方向のエネルギーで規格化したものである。また最適パラメータの探索手順は次のとおりである。

① 最終エミッタンス比 $\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}=\left(\frac{2\mathcal{L}}{\varepsilon_{th}}\right)^2$ から、ソレノイドによるカソード上磁場$B_c$を求める

② $B_c$について STF のソレノイド磁場の調整範囲内で main と buck の組み合わせを求める

③ それぞれの組み合わせについて、ビームサイズごとに Qi をスキャンしながらエミッタンス増大を計算する

各手順について以下に説明する。

①について、これまでの RFBT 実験に用いたシミュレーションでは最終エミッタンス比がおよそ 600 近い値をになることを想定していた。しかしこの場合、必要となるソレノイドの電流値は STF で使用できるの電流値の限界に近いものであった。そこで、ここでは RFBT 条件での Skew 後のエミッタンス比を落とし、400 と仮定した。

この時、(2.58) からソレノイドによる角運動量$\mathcal{L}$は次の様になる。

$$\mathcal{L} = 10\varepsilon_{th} \tag{5.2}$$

ここで (3.1) から、熱エミッタンス$\varepsilon_{th}$はビームサイズに比例するため、ビームサイズごとに角運動量$\mathcal{L}$が求まる。こうして求めた$\mathcal{L}$を、$\mathcal{L} = \frac{eB_c}{2P_z}$に代入することで$B_c$が求められる。Table5.6 はビームサイズごとの熱エミッタンス、角運動量、カソード上磁場をまとめたも

のである。

| σ(mm) | ε th(μm) | L(μm) | Bc(T) |
|---|---|---|---|
| 0.65 | 0.55 | 5.51 | 0.017 |
| 0.7 | 0.59 | 5.93 | 0.018 |
| 0.75 | 0.64 | 6.35 | 0.019 |
| 0.8 | 0.68 | 6.78 | 0.021 |
| 0.85 | 0.72 | 7.2 | 0.022 |
| 0.9 | 0.76 | 7.62 | 0.023 |
| 0.95 | 0.8 | 8.05 | 0.025 |
| 1 | 0.85 | 8.47 | 0.026 |
| 1.05 | 0.89 | 8.89 | 0.027 |
| 1.1 | 0.93 | 9.32 | 0.028 |
| 1.15 | 0.97 | 9.74 | 0.029 |

Fig.5.6 エミッタンス比 400 での、ビームサイズごとの熱エミッタンス、角運動量、カソード上磁場

②について、ASTRA ではカソード上に作られる磁場$B_c$は次の様に計算できる。

$$B_c = \frac{B_{scale}}{B_{main\,peak}} B_{main} + \frac{B_{scale}}{B_{buck\,peak}} B_{buck} \tag{5.3}$$

ここで、$B_{main\,peak}$ $B_{buck\,peak}$は main,buck の磁場マップのピーク磁場強度、$B_{main}$ ,$B_{buck}$ は ASTRA で使用されるソレノイドの磁場マップのカソード位置における磁場強度、$B_{scale}$ はマップのピーク磁場を設定する値であり、$B_{scale}$を調整することでカソード上の磁場を変えられる。

ASTRA の磁場マップの値を代入するとカソード上磁場$B_c$は次の様に書ける。

$$B_c = 0.058 B_{main} + 0.299 B_{buck} \tag{5.4}$$

この式から、STF のソレノイド磁場の調整範囲内で main もしくは buck の値を決めると、ビームサイズごとにソレノイドの組み合わせが求まる。

③について、Table5.7 はビームサイズごとに 4D エミッタンスが最小となるソレノイドと Qi の組み合わせを調べ、その時の結果と組み合わせをまとめたものである。

| ビームサイズ(mm) | 組み合わせ数 | Main（T） | Buck（T） | ℒ（μm） | Qi（T/m） | Δε4D(m^2) | εx εy(μm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.65 | 66 | 3.00E-01 | 7.43E-02 | 5.51 | -5.00E-02 | 5.47E-14 | 7.29 6.20 |
| 0.7 | 121 | 2.50E-01 | 8.40E-02 | 6.39 | -5.00E-02 | 4.00E-14 | 7.69 6.82 |
| 0.75 | 165 | 2.10E-01 | 7.41E-02 | 6.35 | 2.00E-01 | 3.13E-14 | 7.45 6.60 |
| 0.8 | 209 | 1.70E-01 | 7.47E-02 | 6.77 | 2.00E-01 | 2.16E-14 | 7.36 6.87 |
| 0.85 | 242 | 1.40E-01 | 7.42E-02 | 7.18 | 2.00E-01 | 1.71E-14 | 7.76 7.25 |
| 0.9 | 275 | 1.10E-01 | 7.43E-02 | 7.6 | 2.00E-01 | 5.47E-15 | 8.51 7.33 |
| 0.95 | 297 | 1.10E-01 | 6.93E-02 | 8.2 | 2.00E-01 | 4.89E-15 | 8.98 7.66 |
| 1 | 330 | 1.20E-01 | 6.28E-02 | 8.45 | 2.00E-01 | 5.59E-15 | 9.40 8.17 |
| 1.05 | 352 | 1.20E-01 | 5.87E-02 | 8.88 | 2.00E-01 | 4.96E-15 | 9.86 8.51 |
| 1.1 | 374 | 1.20E-01 | 5.50E-02 | 9.3 | 2.00E-01 | 5.62E-15 | 10.17 9.04 |
| 1.15 | 396 | 1.30E-01 | 4.97E-02 | 9.73 | 2.50E-01 | 5.64E-15 | 10.71 9.42 |

Table5.7 ビームサイズごとの 4D エミッタンスが最小になるソレノイドと Qi の組

main は 0~0.35T まで 0.01 ステップずつ変更していき、buck の値はそれに対応して決まる。また、各ソレノイドの組に対して Qi を-0.25~0.25T/m まで 0.05 ステップずつ変更して 4D エミッタンスを調べた。ここで、組み合わせ数とは、(main,buck)の組数と、スキャンする Qi の磁場勾配の数を掛け合わせた値である。Δε4D は以下のように定義した。

$$\Delta\varepsilon_{4D} = \varepsilon_{4D(4.0m)} - \varepsilon_{th}^2 \tag{5.5}$$

$\varepsilon_{4D(4.0m)}$は CCM 直前（4.0m）での 4D エミッタンスを指し、表の一番右にある εx と εy は CCM 直前での横方向エミッタンスの値である。Table5.7 の結果から Fig5.12 に示すような、４D エミッタンスの増分の初期ビームサイズへの依存性が得られる。

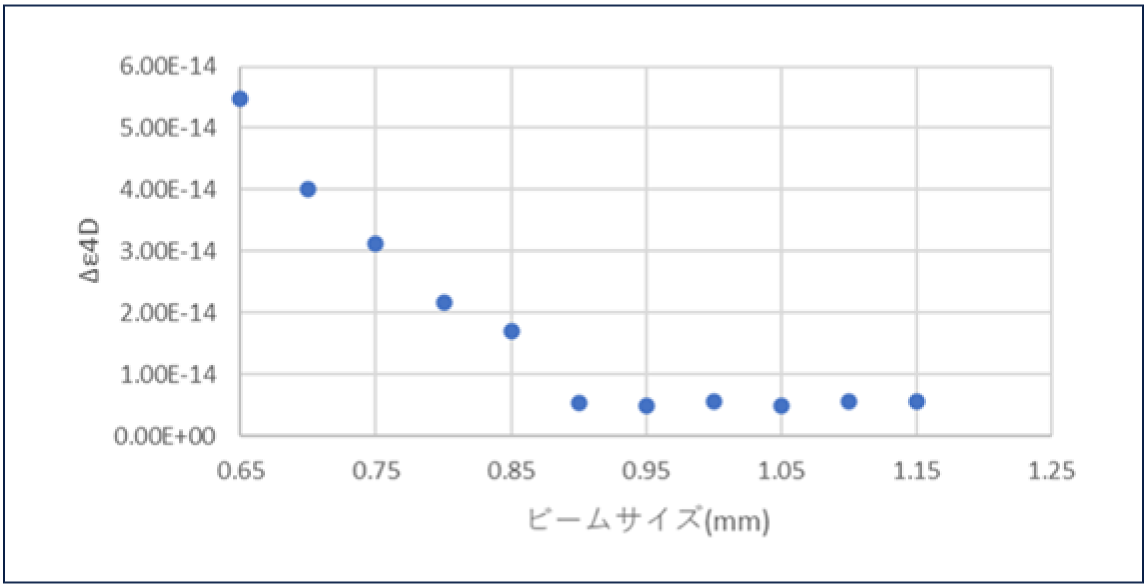


Fig5.12 Δε4D の初期ビームサイズへの依存性

カソードに生成するビームサイズが大きくなるに伴い、4D エミッタンスの増大が小さくなっている。これは、ビームサイズが大きくなると粒子の密度が小さくなり、空間電荷効果が抑制されることによるものと考えられる。ここではビームサイズに注目して 4D エミッタンスが最小になる組について調べた。以降より詳しく空間電荷効果の影響を見るため、スライスエミッタンスについてみていく。

3. 今まで見てきた横方向のエミッタンスは、ビームを進行方向に垂直な面に投影した位相空間分布で定義していた。ここではより詳しくバンチ内の動きを理解するために、スライスエミッタンスをみる。

スライスエミッタンスとは、進行方向に垂直な面でバンチをいくつかに区切り、各スライスを投影した位相空間分布で定義され、スライスエミッタンスを全て重ね合わせて投影したものがこれまで見てきた横方向エミッタンスに相当する。シミュレーションでは進行方向の粒子分布は gaussian を採用しているため、進行方向に対してバンチ中心部ほど粒子密度が大きく、空間電荷効果も大きい。つまり、スライスごとに受ける空間電荷効果が異な

るため、すべてのスライスを投影したときにエミッタンスが増大して見えている可能性が考えられる。これをスライスミスマッチと呼ぶことにする。このことを位相空間でイメージしたものが Fig5.13 である。

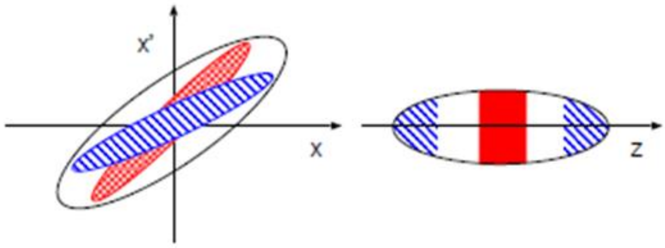


Fig5.13 異なるスライスの位相空間分布の様子【1】より引用

バンチ端部のスライスでは、密度分布が小さいため、空間電荷効果による傾きが小さくなっている。反対にバンチ中心部のスライスでは、密度分布が大きいため空間電荷効果の影響も大きくなり、スライスの位相空間分布は大きな傾きを持っていることが分かる。

このスライスの影響を見るために、シミュレーションでスライスごとの Twiss $\alpha$ を調べた。Twiss $\alpha$ は次の式で表される。

$$\alpha = -\frac{1}{2}\beta' \tag{5.6}$$

ここで、$\beta$ は Twiss $\beta$ であり、$\sigma = \sqrt{\varepsilon\beta}$ から、$\alpha$ は位相空間での楕円の傾きであると考えることができる。

Fig5.14 は、ソレノイドを Table5.7 のように変化させたときのバンチ中心、head,tail の $\alpha$ を関数の傾きとしてプロットしたものである。左図は空間電荷効果を入れた場合、右図は空間電荷効果が入っていない場合のプロットである。空間電荷効果がある場合、x,y ともに $\alpha$ がバンチ中心とバンチ端で大きくずれていることが分かる。

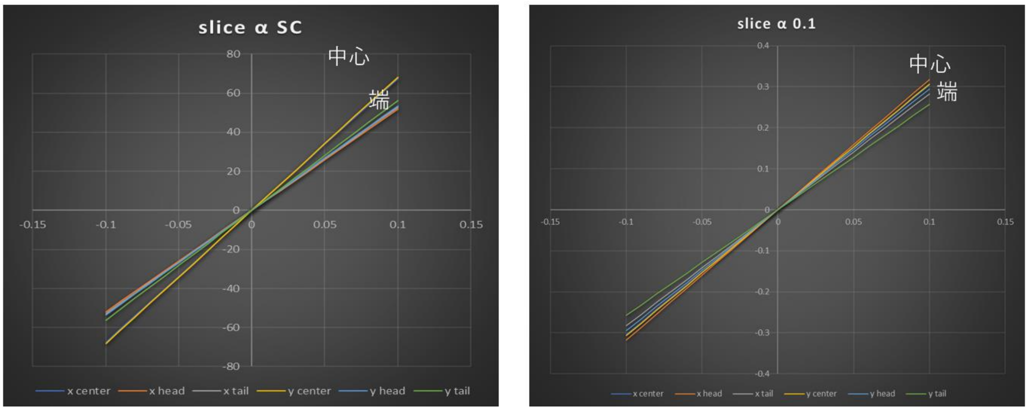


Fig5.14 スライスごとの Twiss $\alpha$。空間電荷効果あり（左）、空間電荷効果なし（右）

このように、スライスごとに Twiss $\alpha$ をみることでバンチ内でのスライスのミスマッチを確認できる。

このスライスごとの Twiss $\alpha$ をシケイン、Qi、ソレノイドの影響と合わせて調べた。Fig5.15 は、ソレノイド、シケイン、Qi を入れた状態での 4D エミッタンスと Twiss $\alpha$ の標準偏差を比べたものである。上から chicane 偏向角 16°,14°,12°,0° での 4D エミッタンス増大（左図）と Twiss $\alpha$ の標準偏差（右図）を示す。

ここで、Twiss $\alpha$ の標準偏差は、次の様に定義した。

$$\sigma = \sigma_x \times \sigma_y \tag{5.7}$$

$\sigma_x$は x 方向のスライスの各 Twiss $\alpha$ に対して、バンチ中心での Twiss $\alpha$ からのズレを計算した平均値であり、$\sigma_y$は y 方向に対して同様に計算したものである。この標準偏差は、バンチ内でのスライスミスマッチがどの程度補正できているかを表す指標となり、値が小さいほどスライスミスマッチの補正ができていると考えられる。また、各点は Qi でスキャンしたときの最小値を示していることから、1 点でソレノイド、Qi の組が決まっている。

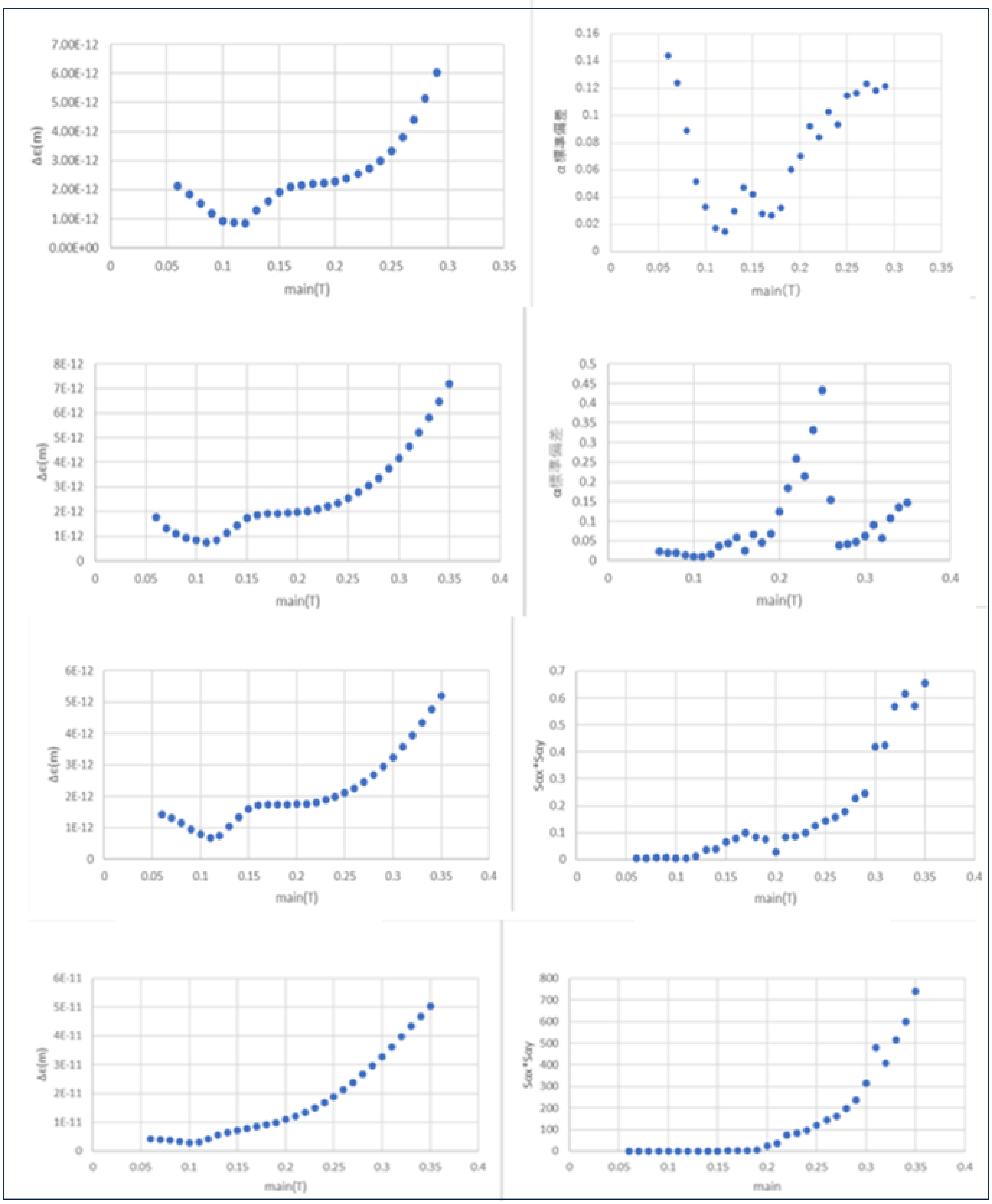


Fig5.15　上から順に chicane 偏向角 16°,14°,12°,0°での 4D エミッタンス増大（左）と Twiss $\alpha$ の標準偏差（右）

Twiss $\alpha$ の標準偏差 Chicane 偏向角 16°（一番上)の時の 4D エミッタンスの増大と、Twiss $\alpha$ の標準偏差を比べると、ともに最小となるソレノイドの組み合わせが一致した。ほかの偏向角でも 4D エミッタンスの増大と Twiss $\alpha$ の標準偏差が最小になるときのソレノイドの組は一致していたことから、4D エミッタンスの増大原因はスライスミスマッチである

と考えることができ、このミスマッチを補正するソレノイド、Qi、シケインの組み合わせを最適なセットアップとみなし、その組を探索した。

シケイン偏向角が大きいときほどエミッタンス増大が大きくなるのは dispesion が大きくなるためである。Chicane 入口で立ち上がった dispersion は、通常空間電荷効果がない場合シケイン出口で落ち込む。しかし、空間電荷効果がある場合、dispersion によって生じた位相空間分布にずれはシケイン出口で残ったままになり空間電荷効果が相まってエミッタンスの増大が生じる。

この chicane 通過後の横方向スライスを偏向角ごとに表したものが Fig5.16 である。

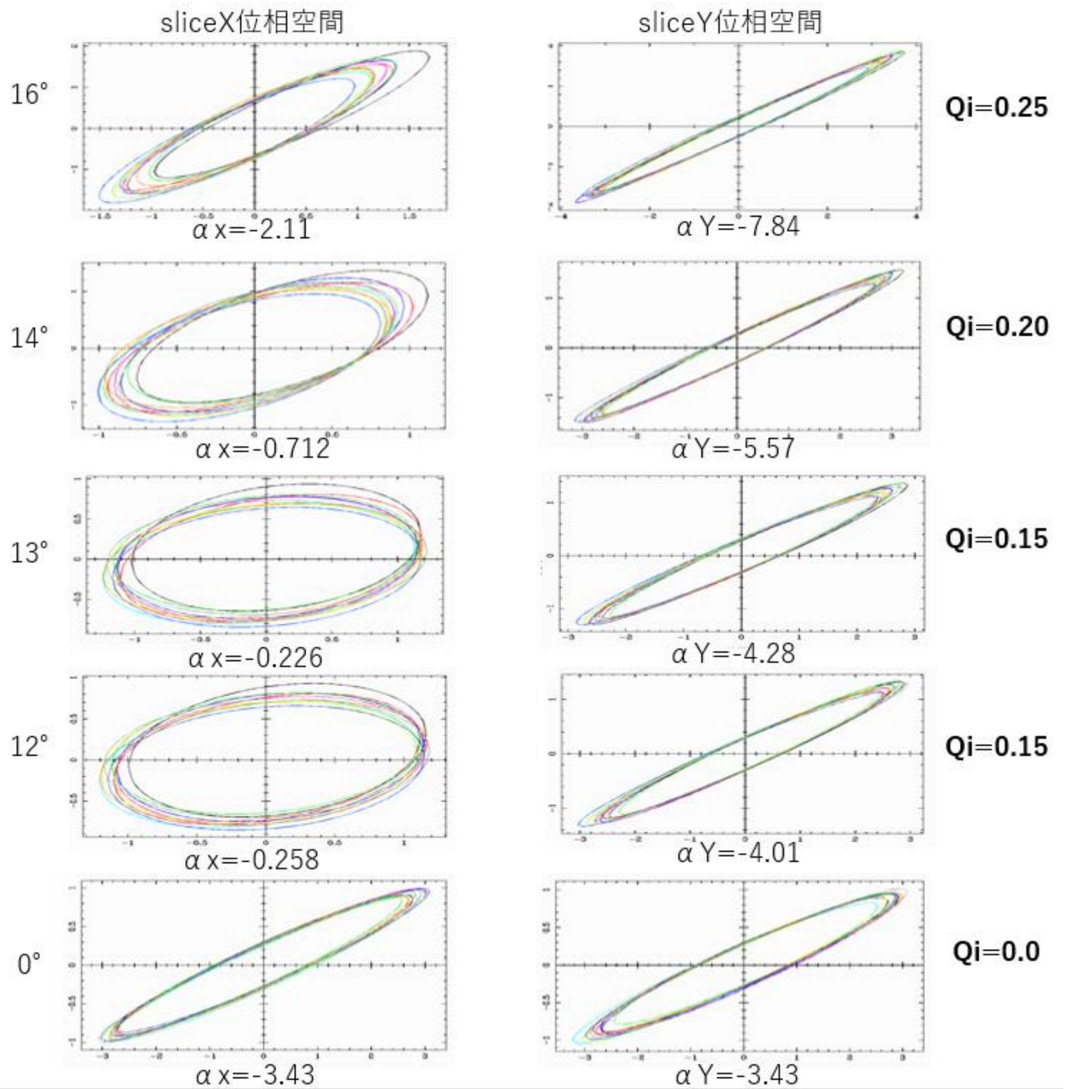


Fig5.16 上から順に chicane 偏向角 16°,14°,12°,0°の時の chicane 通過後の横方向スライス

シケイン偏向角が大きい場合、x 方向のスライスがずれていることが分かる。これにより エミッタンスの増大が生じると考えられる。

しかし、一般に空間電荷効果が線形ならば、必ずしもエミッタンス増大を引き起こすわけではない。例えば、空間電荷効果がある場合ビームの運動量は次の様に書ける。【1】

$$x' = f(z,x)z \tag{5.8}$$

ここで$f(z,x)$は空間電荷効果を表す関数とする。この空間電荷効果が線形だとすると(5.8)は次の様に書ける。

$$x' = f_0 xz \tag{5.9}$$

(5.8)から(5.9)では、ドリフト距離が短いと仮定し、$f(z,x)$の z 成分の効果を無視した。これを位相空間分布で見てみると Fig5.17 のようになる。

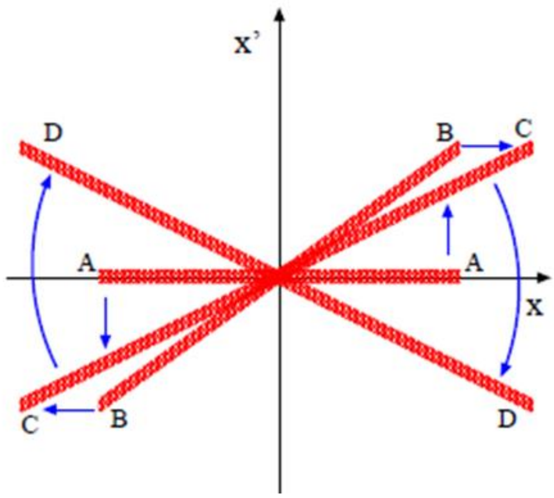


Fig5.17 空間電荷効果が線形の時の位相空間分布の動き【1】より引用

初期状態 AA ではビームは運動量分布を持っていないものとする。(5.9)によって、ビームは運動量を持ち BB に移る。ここで、ビームが運動量を持つため、CC のように空間分布もそれに比例して広がる。このように AA から CC へ移動したとしてもビームは直線を維持したままでありエミッタンス増大は生じない。DD はビームをソレノイドを通過させたときの様子である。ソレノイドは収束力を持つため CC から DD へ移る。この時もエミッタンスの増大は生じておらず、なお空間電荷効果は働き続けるため、ソレノイドの収束力を適当に調節すれば DD 分布から再び AA 分布に戻ることができる。つまり、空間電荷効果が完全に線形であればエミッタンスの増大は生じないことが分かる。例えば、ビームの

横方向分布が円筒形（cylindrical）で一様な場合、分布は進行軸 z に対して対称であり、密度が一定のためエミッタンス増大は生じない。

次に空間電荷効果が非線形の場合を考える。(5.9)が非線形の場合、位相空間分布は Fig5.18 のように変化する。

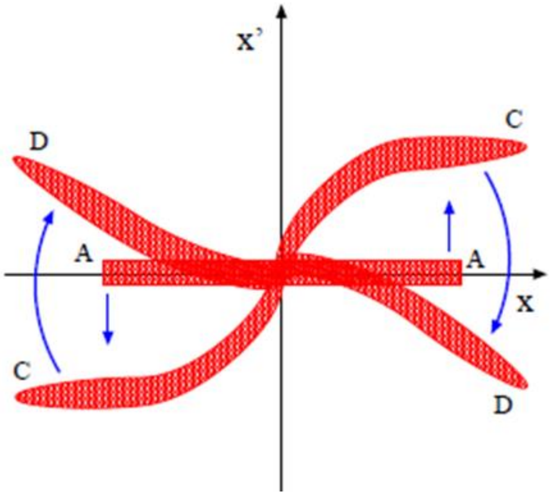


Fig5.18 空間電荷効果が非線形の時の位相空間分布の動き【1】より引用

空間電荷効果が線形の場合と同様に、分布は AA から CC,DD へと動いていく。非線形の場合はこのように分布が歪みながら傾きを持っていくが、面積で考えると依然としてエミッタンスの増大は起きていない。しかし、xx'の相関は減少しており、RMS エミッタンスを見ると、(2.1)からエミッタンス増大が起きることが分かる。

このことを確かめるために、異なる横方向分布を持つビームで 4D エミッタンスの増大を調べた。Fig5.19 は、カソードに生成する横方向の粒子の位置分布が cylindrical の場合と、gaussian の場合を比べたものである。比較のために、ともに運動量分布は gaussian とし、横方向 rms ビームサイズを 1mm、バンチ長を 10ps、熱エミッタンスを 0.85$\mu$m と合わせた。

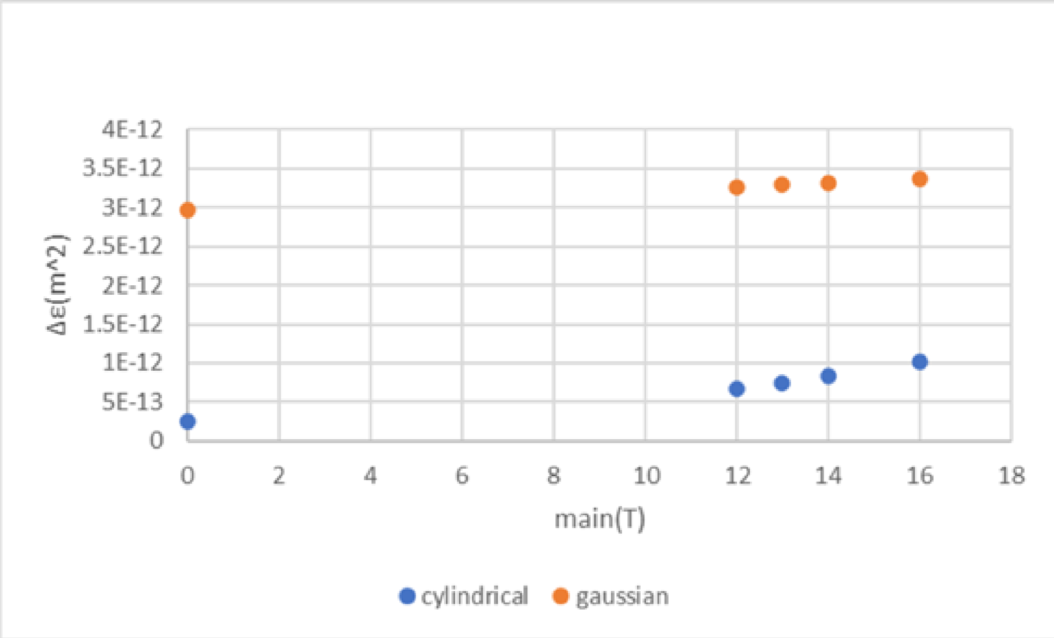


Fig5.19 初期粒子分布と 4D エミッタンス増大。Gaussian(黄色)、cylindrical(青色)

この結果から初期粒子分布が gaussian の場合、cylindrical に比べて 3〜4 倍程度エミッタンス増大の影響が大きいことが分かった。一般的なビーム実験で用いられるビーム形状は gaussian に分布するため、粒子分布の形状は STF でのエミッタンス増大にも大きく影響していると考えられる。

# 6　結果

5 章では、4D エミッタンスやスライスミスマッチについてみることで、上流部の最適なセットアップを決定した。本章では、最適なセットアップについて異なる条件下で RFBT の結果を示し、次回の実験に向けて RFBT の特性をまとめる。検証する条件は次のとおりである。

1　chicane 偏向角に対する特性

2　初期粒子分布に対する特性

3　初期ビームサイズに対する特性

4　電荷量に対する特性

## 6-1　chicane 偏向角に対する特性

ここでは、理想的なエミッタンス比を 400 と仮定し、5 章に記した最適セットアップの探索を施したのち、chicane 偏向角が与える RFBT 特性の結果を示す。

カソード上に作る RMS ビームサイズ 1mm、粒子分布は cylindrical、粒子数 10000、バンチ電荷 60pC として、シミュレーションした。Table6.1 は空間電荷効果を含まない場合と含んだ場合についてまとめたものである。

| 偏向角(度) | Δα(%) | Δβ(%) | εx/εy | 再現率(%) |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 0.14 | 0.055 | 308 | 91 |
| 14 | 0.13 | 0.024 | 263 | 76 |
| 13 | 0.14 | 0.074 | 313 | 89 |
| 12 | 0.17 | 0.121 | 326 | 92 |
| 0 | 0.21 | 0.222 | 351 | 95 |

| 偏向角(度) | Δα(%) | Δβ(%) | εx/εy | 再現率(%) |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 0.288 | 0.049 | 247.1 | 91 |
| 14 | 0.339 | 0.057 | 193 | 69 |
| 13 | 0.296 | 0.071 | 251 | 89 |
| 12 | 0.414 | 0.099 | 259.4 | 91 |
| 0 | 0.388 | 0.166 | 308 | 93 |

Table6.1 chicane 偏向角に対するエミッタンス比.空間電荷効果なし(左),空間電荷効果あり(右)

ここで再現率(%)とは、計算値に対するシミュレーションの値である。計算値は以下のように計算される。

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \frac{\sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2 + \Delta\varepsilon_{4D}^2} + \mathcal{L}}{\sqrt{\varepsilon_u^2 + \mathcal{L}^2 + \Delta\varepsilon_{4D}^2} - \mathcal{L}} \tag{6.1}$$

この計算値に含まれる 4D エミッタンスは、空間電荷効果などの非線形性を含んでいるため、再現率から RFBT のシミュレーション精度が分かる。シミュレーション精度とは、ELEGANT を用いた最適化の精度のことである。

また、$\Delta\varepsilon_{4D}$は 4D エミッタンスであるが、この値が 2 次元エミッタンスに投影されたとき、x と y で対象に振り分けられると仮定して計算した。Δ$\alpha$とΔ$\beta$は Skew セクション手前でどの程度 Twiss パラメータのズレがあるかを表したものである。これまでのシミュレーションから、RFBT を行うにはΔ$\alpha$=1%,Δ$\beta$=0.6%以下で一致する必要があることが分かっている。

Table6.1 から、chicane 偏向角が大きいほど最終エミッタンス比は小さくなり、空間電荷効果を含んでいる場合は空間電荷効果を含まない場合に対して 15%程度落ち込むことが分かる。

## 6-2　初期粒子分布に対する特性

ここでは、カソードに作られる粒子の横方向の空間分布が RFBT に与える影響について、cylindrical と gaussian の場合で空間電荷効果を含めて検証した。また、前節と同様にカソード上に作る RMS ビームサイズ 1mm、粒子数 10000、バンチ電荷 60pC としてシミュレーションの結果を Table6.2 に示す。

| 偏向角(度) | Δα(%) | Δβ(%) | εx/εy | 再現率(%) |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 0.14 | 0.055 | 247.1 | 90 |
| 14 | 0.13 | 0.024 | 193 | 69 |
| 13 | 0.14 | 0.074 | 251 | 88 |
| 12 | 0.17 | 0.121 | 259.4 | 91 |
| 0 | 0.21 | 0.222 | 308 | 93 |

| 偏向角(度) | Δα(%) | Δβ(%) | εx/εy | 再現率(%) |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 0.28 | 0.047 | 176 | 84 |
| 14 | 0.23 | 0.042 | 189 | 86 |
| 13 | 0.24 | 0.096 | 193 | 85 |
| 12 | 0.25 | 0.336 | 208 | 88 |
| 0 | 0.69 | 0.108 | 292 | 91 |

Table6.2 初期粒子分布に対するエミッタンス比. cylindrical（左）gaussian（右）

Fig6.1 はこの結果を横軸に偏向角（度)、縦軸にエミッタンス比でプロットしたものであ

る。

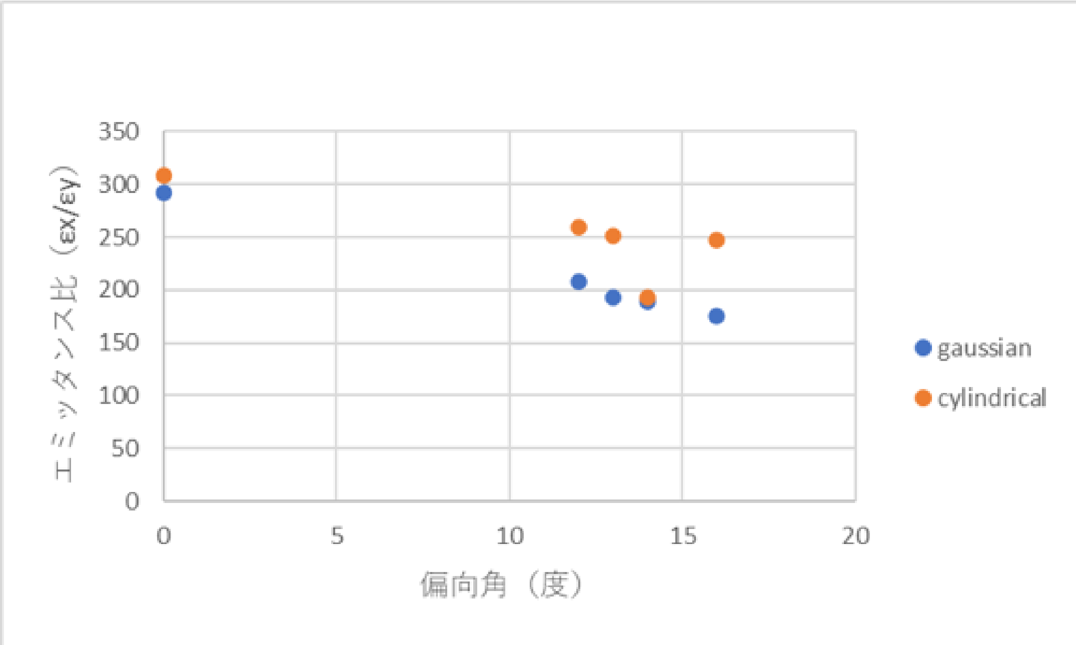


Fig6.1　初期粒子分布に対するエミッタンス比. cylindrical（黄点）、gaussian（青点）

Table6.1 に示した結果と同様に、シケイン偏向角が大きいほどエミッタンス比は小さくなっている。粒子分布が gaussian の場合は cylindrical に比べ 20%程度エミッタンス比は落ち込んでおり、再現率も数%低くなっている。これは gaussian の場合、粒子分布密度が一様でないため、空間電荷効果の影響が cylindrical の場合よりも大きくなっており、Twiss パラメータの一致率も悪いことが原因と考えられる。

## 6-3　初期ビームサイズ対する特性

これまでのシミュレーションではカソード上に作るビームの横方向 RMS ビームサイズを 1mm として計算してきた。空間電荷効果は粒子密度が大きいほど強く働くため、ビームサイズによって RFBT の最終結果に影響を与えると考えられる。次に示す結果は、初期ビームサイズを 0.6~1.0 まででシミュレーションしたものである。粒子数 10000、バンチ電荷 60pC、としてシミュレーションの結果を Table6.3 に示す。

熱エミッタンスはビームサイズに依存するため、ビームサイズによって熱エミッタンスは異なるが、理想的なエミッタンス比はこれまでと同様に 400 になるように調整した。

| ビームサイズ(mm) | Δα(%) | Δβ(%) | εx/εy | 再現率(%) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.14 | 0.055 | 247.1 | 91 |
| 0.9 | 0.22 | 0.094 | 218 | 90 |
| 0.8 | 0.36 | 0.072 | 98 | 47 |
| 0.7 | 0.28 | 0.078 | 174 | 88 |
| 0.6 | 0.33 | 0.085 | 119 | 81 |

| ビームサイズ(mm) | Δα(%) | Δβ(%) | εx/εy | 再現率(%) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.28 | 0.047 | 175.8 | 84 |
| 0.9 | 0.38 | 0.074 | 159 | 86 |
| 0.8 | 0.49 | 0.059 | 127 | 82 |
| 0.7 | 0.35 | 0.056 | 104 | 83 |
| 0.6 | 0.33 | 0.081 | 81 | 82 |

Table6.3　初期ビームサイズに対するエミッタンス比。Cylindrical(左) , gaussian（右）

これを横軸にビームサイズ(mm)、縦軸にエミッタンス比をとってプロットすると Fig6.2 のようになる。

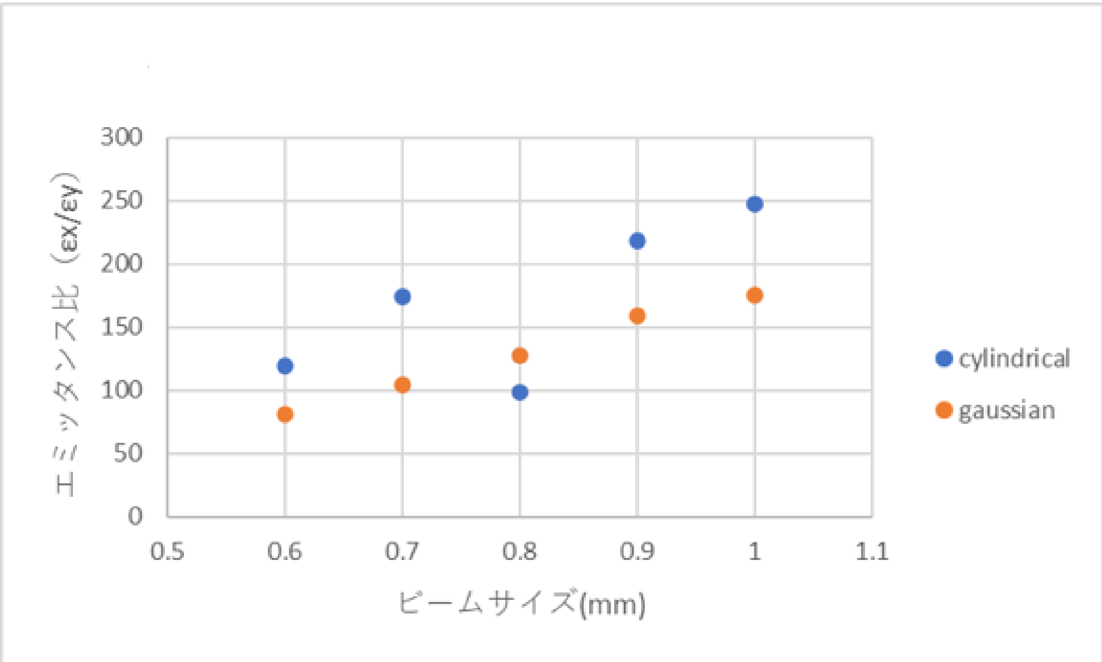


Fig6.2 初期ビームサイズに対するエミッタンス比のプロット

ビームサイズが小さいほど得られるエミッタンス比は小さくなっていることが分かる。このシミュレーションではバンチ当たりの粒子数を固定しているため、ビームサイズが小さいビームは密度が大きい。これによって空間電荷効果が増大していると考えられる。また、Table6.2 と比較すると、空間電荷効果の RFBT への影響は、粒子分布よりもビームサ

イズの方が強く関係することが分かる。

### 6-4　電荷量に対する特性

これまでのシミュレーションでは、バンチ当たりの電荷量は 60pC である。空間電荷効果は電荷量にも依存するため、電荷量が与える RFBT への影響を調べた。カソード上に作る RMS ビームサイズ 1mm、粒子数 10000、シケイン偏向角 16°である。Table6.4 はその結果をまとめたものである。

| 電荷量(pC) | Δα(%) | Δβ(%) | εx/εy | 再現率(%) |
|---|---|---|---|---|
| 60 | 0.288 | 0.049 | 247 | 91 |
| 50 | 0.271 | 0.054 | 252 | 90 |
| 40 | 0.331 | 0.061 | 268 | 91 |
| 30 | 0.182 | 0.034 | 244 | 80 |
| 20 | 0.193 | 0.044 | 281 | 89 |
| 10 | 0.166 | 0.051 | 295 | 91 |
| 0 | 0.14 | 0.055 | 308 | 92 |

| 電荷量(pC) | Δα(%) | Δβ(%) | εx/εy | 再現率(%) |
|---|---|---|---|---|
| 60 | 0.28 | 0.047 | 175.8 | 84 |
| 50 | 0.351 | 0.044 | 174 | 81 |
| 40 | 0.291 | 0.058 | 189 | 87 |
| 30 | 0.383 | 0.073 | 196 | 89 |
| 20 | 0.267 | 0.062 | 195 | 86 |
| 10 | 0.225 | 0.079 | 211 | 91 |
| 0 | 0.247 | 0.071 | 220.3 | 94 |

Table6.4　電荷量に対するエミッタンス比。Cylindrical（左）。Gaussian（右）

これを横軸にバンチ電荷（pC)、縦軸にエミッタンス比をとってプロットすると Fig6.3 のようになる。

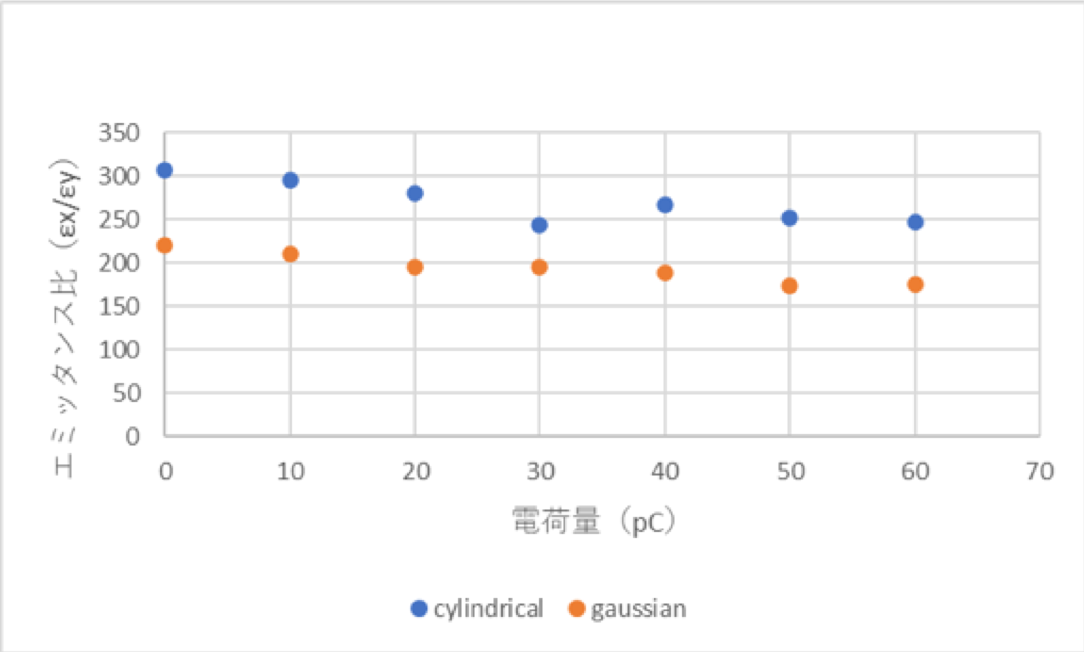


Fig6.3 電荷量に対するエミッタンス比のプロット

この結果から、バンチ内電荷量が大きいほどエミッタンスが小さくなることが分かる。ASTRA では、設定したバンチ電荷は粒子数に応じて均等に割り振られる。したがって電荷量が増えると、1 粒子あたりが持つ電荷も大きくなるため、空間電荷効果がより顕著に表れるという結果になった。

## 7. 考察

6 章では４D エミッタンスとスライスミスマッチの観点から最適化されたセットアップのもと、異なる条件下（シケイン偏向角、粒子分布、ビームサイズ、電荷量）の RFBT のシミュレーション結果を示した。

どの条件においても、シケイン偏向角が大きいほど最終的なエミッタンス比が落ち込んでいる。これは主にシケイン内部での dispersion が空間電荷効果によって残った結果、スライスミスマッチが解消されずエミッタンスの増大が起こったものと考えられる。５章で探索した最適セットアップも、6 章に示した異なる条件でのエミッタンス比の傾向も、このスライスミスマッチがなるべく抑制できる条件を見ているということである。

Fig7.1 は空間電荷効果を含んだ時のシケインでの粒子の平均 x 軌道を表している。横軸はカソード端部を基準としたときの z 軸、縦軸は粒子の平均 x 座標

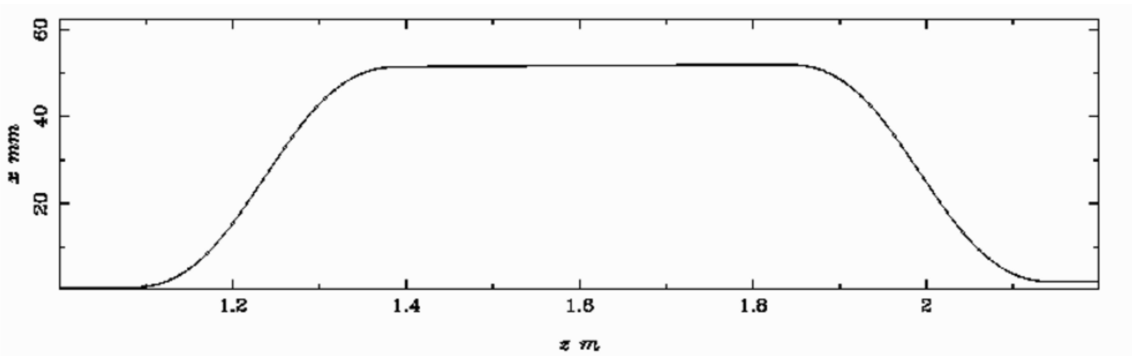


Fig7.1 シケインでの粒子の平均 x 軌道

軌道はシケイン前後で閉じていないことが分かり、軌道にずれが生じていることが分かる。このときの横方向エミッタンスの推移を横軸に z(m)、縦軸にエミッタンスをとってプロットすると Fig7.2 のようになる。

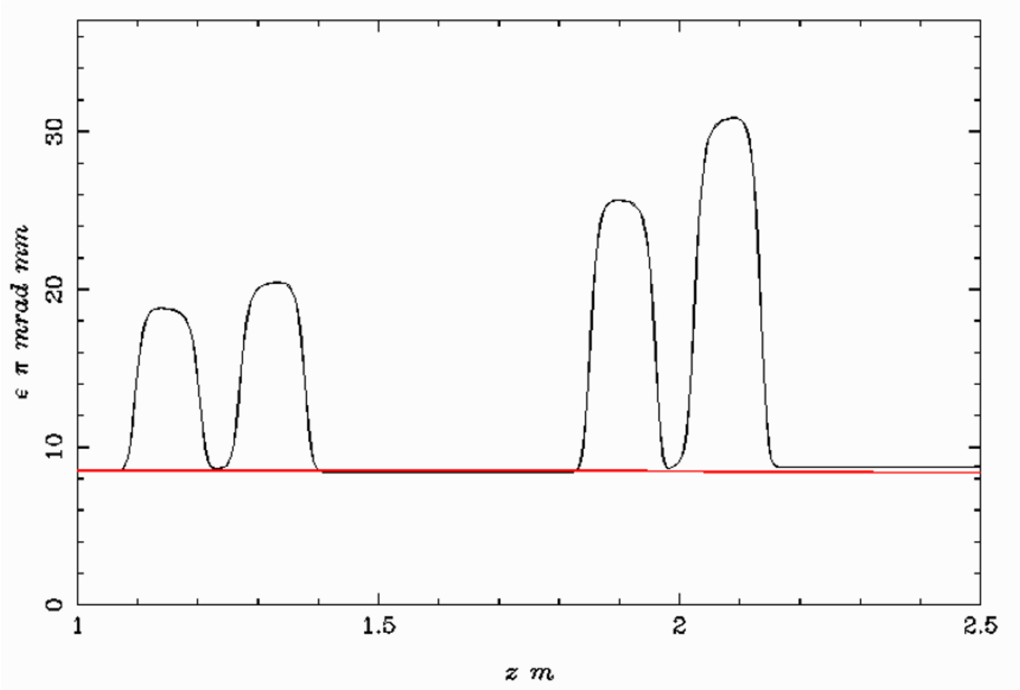


Fig7.2 シケインでの横方向エミッタンス。黒線 x エミッタンス、赤線 y エミッタンス

x 軌道と同様に x 方向のエミッタンスはシケイン前後で閉じておらず、シケイン通過後に x 方向エミッタンスは増加する。

次に再現率について考える。6 章では RFBT 後のエミッタンス比とその時の再現率を示した。再現率(%)とは、計算値に対するシミュレーションの値であり、最適化の精度を表す指標として用いた。全体的に 80~90%の精度で再現できているが、一部の結果では再現率が悪いものもある。ASTRA や ELEGANT の計算精度の制限はあるだろうが、最適化が適切に行われていれば、理想的には再現率は 100%になるはずである。

Fig5.5 に示したとおり、最適化の精度は目的関数 f がどの程度 0 に追い込めているかで決まる。この精度は tolerance やステップの大きさによって変わるが、本研究では目的関数 f の値を 0 にすることはできず、一定の値が残った。原因として ELEGANT で最適化する Quadrupole を分けていたことが考えられる。

ELEGANT の最適化には基準となるビームエネルギーを設定する必要がある。STF のビームラインでは、CCM 後と CM 後でビームエネルギーが異なるため Twiss パラメータを対象にするための Quadrupole の最適化は 2 つのセクションに分けて行った。

Fig7.3 は ELEGANT で最適化を行った Quadrupole と使用したファイルである。

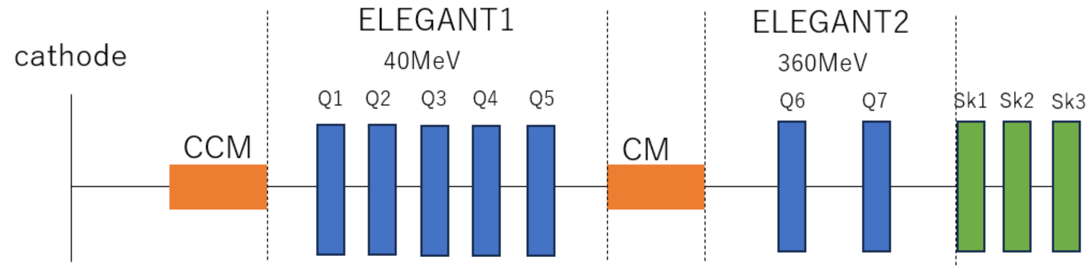


Fig7.3　Quadrupole と使用した ELEGANT ファイルの関係

Q1~Q5 は 40MeV、Q6,Q7 は 360MeV であり、ELEGANT1,ELEGANT 2 それぞれのファイルで目的関数 f の最適化を行った。その結果、CM に入る前の段階で Twiss パラメータはほとんど対称化される。したがって ELEGANT2 の最適化では Q6,Q7 の値は Q1~Q5 に比べて極めて小さい。これにより ELEGANT2 の最適化では、ステップをより小さく見ていく必要がある。本研究でもこのことを踏まえて ELEGANT1 よりも ELEGANT2 のステップを小さく設定したが、結果として精度を出せなかった。

これを克服するためには ELEGANT1,2 を統合したファイルを作り、7 つの Quadrupole すべてを使って、1 回の最適化で Twiss パラメータを対称化することが考えられる。

# 8. まとめ

ILC をはじめとするコライダー実験ではルミノシティを高めることが重要である。Beamstrahlung と消費電力を抑えながらルミノシティを高めるためには RFBT,TLEX と呼ばれる、位相空間上でビームを制御する技術を用いることで DR を必要としないシンプルな加速器をデザインできる。

本研究ではその足掛かりとして RFBT による$\varepsilon_x \gg \varepsilon_y$となる非対称なエミッタンスビームの生成について STF での予備実験とシミュレーションによる解析を行った。STF の実験ではビームライン上流部でのエミッタンス増大が顕著であり、RFBT は確認されなかったが、空間電荷効果がシケインでスライスミスマッチを誘起していることが原因であるとシミュレーションによって判明した。

また、シケインでのスライスミスマッチが抑制される最適なセットアップをシミュレーションによって探索した。ビームサイズ、電荷、初期粒子分布、シケイン偏向角が異なる条件のもと、4D エミッタンスやスライスごとの Twiss パラメータをみることで、条件ごとに最適なセットアップが見つかった。このセットアップで RFBT のシミュレーションを行うと、粒子分布が gaussian で空間電荷効果を含んだ場合であっても最終エミッタンス比 196 が確認された。これは線形計算で求められる理想的なエミッタンス比 400 に対しては約 50%、非線形を考慮したエミッタンス比 220 に対しては 89%で再現されており、これまでの空間電荷効果を入れた RFBT シミュレーションの精度を上回ることができた。しかし、最適化の計算精度には課題が残った。

今後は最適化のプロセスを見直すことで RFBT の精度をさらに上げ、最終的には TLEX と組み合わせることで 6 次元位相空間での扁平ビーム生成を目指す。

# 謝辞

本研究を行うにあたり、研究活動に対する姿勢や知識などを日々熱心に指導してくださり、STF での実験や加速器スクールなど加速器物理に関する貴重な機会を与えてくださった指導教員の栗木雅夫先生に深く感謝を申し上げます。

共同研究者である

広島大学 LIPTAK ZACHARY JOHN 氏、荒本真也氏、MUKHERJEE SAYANTAN 氏

KEK 早野仁司氏、山本康史氏、 山本尚人氏、東北大学 柏木茂氏、早稲田大学 鷲尾方一氏、東京大学 坂上和之氏には研究に関するご指導を賜るなど大変お世話になりました。

KEK の倉田様をはじめとする職員の方々には、実験データの提供や質問などを快く受け入れていただくなど、実験の解析にご協力をいただき感謝申し上げます。

また、加速器物理学研究室のメンバーのおかげで有意義な研究生活を送ることができました。ありがとうございます。

最後に、大学院での研究活動をするにあたり、精神的、経済的に支援してくれた家族にこの場を借りて感謝致します。

# 参考文献

【1】Graduate school of Advanced Sciences of Matter, Hiroshima University Accelerator Physics Foundation of Electron Accelerator Author: Masao KURIKI

【2】THE UNIVERSITY OF CHICAGO ANGULAR-MOMENTUM-DOMINATED ELECTRON BEAMS AND FLAT-BEAM GENERATION A DISSERTATION SUBMITTED TO THE FACULTY OF THE DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES IN CANDIDACY FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY DEPARTMENT OF PHYSICS BY YIN-E SUN CHICAGO, ILLINOIS JUNE 2005

【3】K.-J. Kim, “Round-to-flat transformation of angular-momentum-dominated beams,” Phys. Rev. ST Accel. Beams 6, 104002 (2003).

【4】Transverse-to-longitudinal emittance exchange to improve performance of high-gain free-electron lasers P. Emma and Z. Huang Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, California 94309, USA K.-J. Kim Argonne National Laboratory, Argonne, Illinois 60439, USA P. Piot Northern Illinois University, DeKalb, Illinois 60115, USA and Fermi National Accelerator Laboratory, Batavia, Illinois 60510, USA (Received 1 August 2006; published 25 October 2006)

【5】A Space Charge Tracking Algorithm Version 3.2 March 2017 Author: Klaus Floettmann DESY Notkestr.85 22603 Hamburg Germany Klaus.Floettmann@DESY.De

【6】User’s Manual for elegant Program Version 15.1.1 Advanced Photon Source Michael Borland April 21, 2004

【7】加速器科学　亀井亨　木原元央

【8】Particle Accelerator Physics Helmut Wiedemann

【9】M.Fukuda, ”エミッタンス測定”, oho, (2020)

【10】位相空間回転による非対称エミッタンスビーム生成のための実験的研究 ,荒本真也,2021

【11】超伝導 9 セル加速空洞の高次モードに関する研究 , 渡邉謙, 2007